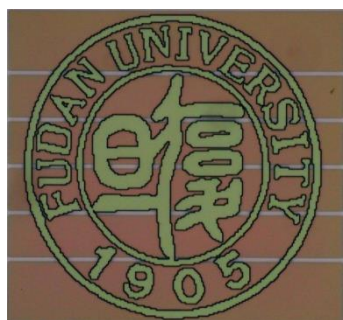




电路基础

(Fundamentals of Electric Circuits, INF0120002.07)

2019年05月30日

唐长文 教授

zwtang@fudan.edu.cn

<http://rfic.fudan.edu.cn/Courses.htm>

复旦大学/微电子学院/射频集成电路设计研究小组

版权©2019，版权保留，侵犯必究

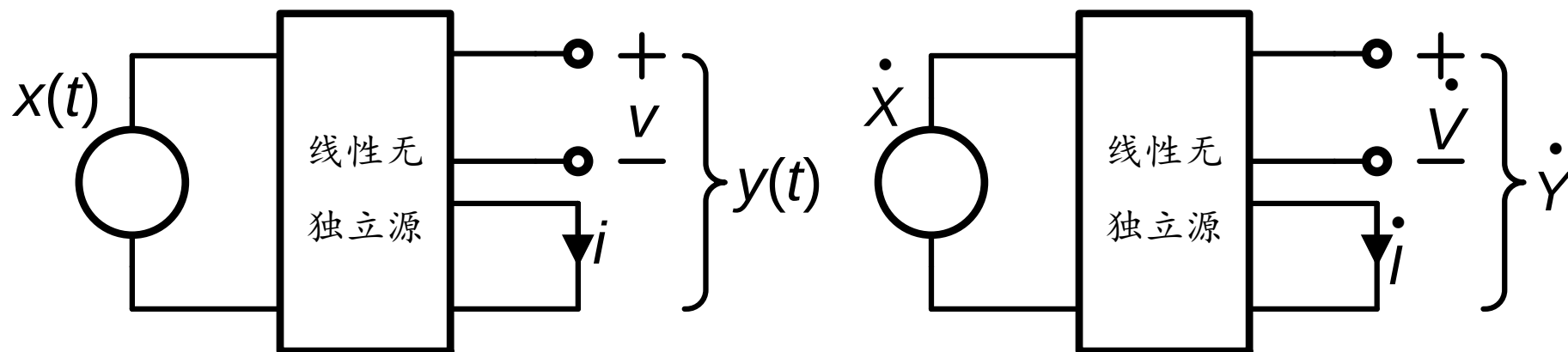
第十章 电路的频率响应

- 网络函数和频率特性
- RLC 串联电路的频率特性
- 串联谐振电路
- 并联谐振电路

网络函数和频率特性

- 齐性定理
 - 若线性电路中只有一个电源，则各处电压电流与此电源的源电压或源电流成正比
 - 也适用于正弦电流电路的向量模型
- 电路网络
 - 激励 $\dot{X}$ ：单一电源的源电压或源电流
 - 响应 $\dot{Y}$ ：某一电压或电流

网络函数



- 网络函数：响应向量与激励向量的比例系数

$$H(j\omega) = \frac{\dot{Y}}{\dot{X}}$$

网络函数

- 响应与激励属于同一端口的网络函数

激励	响应	网络函数
电流源	电压	等效阻抗
电压源	电流	等效导纳

网络函数

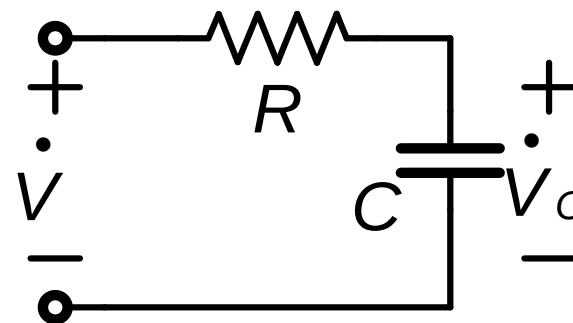
- 响应与激励属于不同端口的网络函数（转移函数/传递函数）

激励	响应	网络函数（转移函数）
电流源	电流	转移电流比
电流源	电压	转移阻抗
电压源	电流	转移导纳
电压源	电压	转移电压比

网络函数

- 网络函数
 - 电路结构
 - 元件参数
 - 电源频率
- 电路的频率响应
 - 网络函数或响应随频率的变动规律

激励 $\dot{V}$
响应 $\dot{V}_C$



$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_C}{\dot{V}} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

网络函数

$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_C}{\dot{V}} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

- 极坐标形式

$$|H(j\omega)| \angle \theta(\omega) = \frac{V_C \angle \psi_C}{V \angle \psi} = \frac{V_C}{V} \angle (\psi_C - \psi)$$

{	频率特性	幅频特性	$ H(j\omega) = V_C/V$	(响应和激励有效值之比与频率的关系)
	特性	相频特性	$\theta(\omega) = \psi_C - \psi$	(响应超前于激励的相位差与频率的关系)

网络函数

$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_C}{\dot{V}} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$$

- RC 具有时间的量纲，导数具有频率的量纲
- 定义 RC 电路的固有频率或自然频率

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

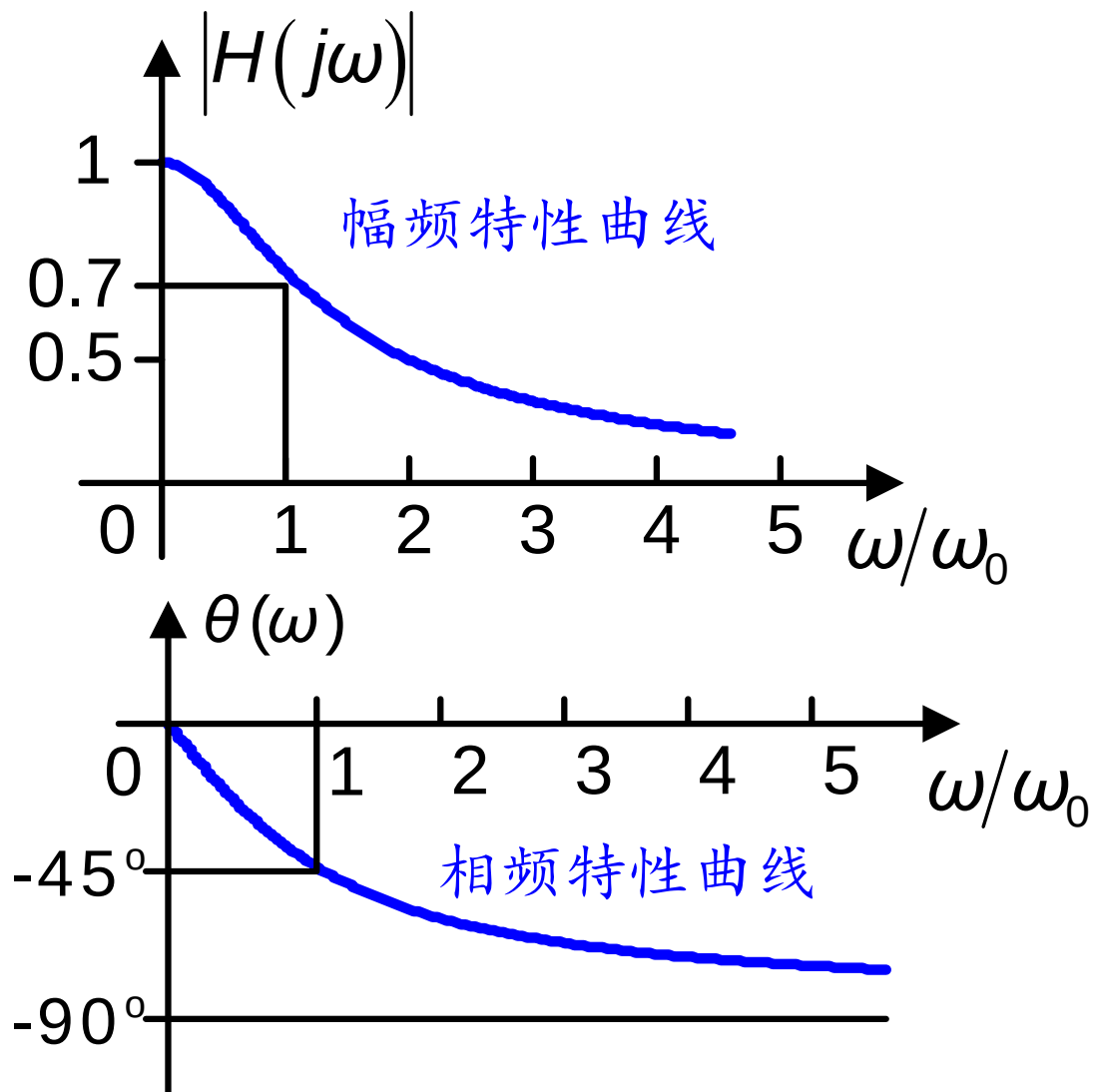
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega / \omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega / \omega_0)^2}} \angle(-\arctan \frac{\omega}{\omega_0})$$

幅频和相频特性曲线

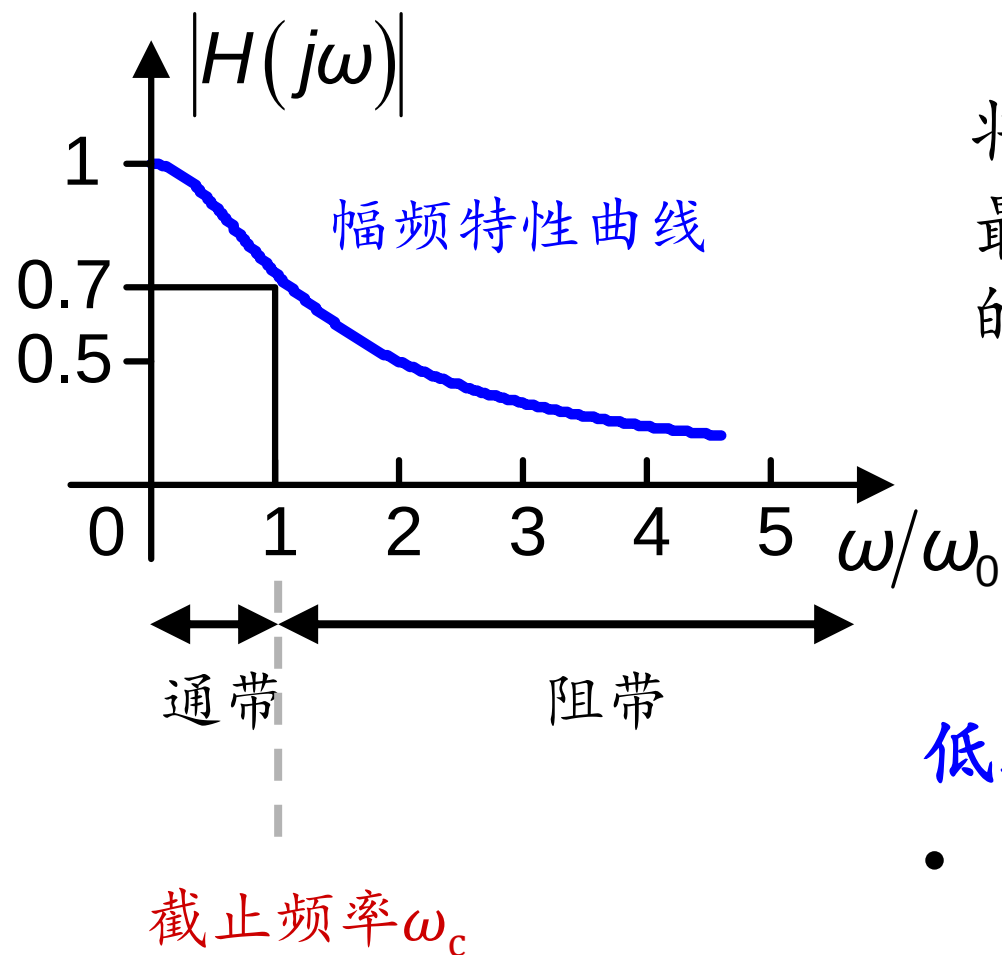
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega / \omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega / \omega_0)^2}} \angle(-\arctan \frac{\omega}{\omega_0})$$

0	1	0°
1	$1/\sqrt{2}$	-45°
2	$1/\sqrt{5}$	-63.43°
.....		
∞	0	-90°

幅频特性和相频特性曲线



幅频特性和相频特性曲线



将网络函数的模下降到最大值的 $1/\sqrt{2}$ 时所对应的频率称为截止频率 ω_c

$$\omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

低通网络：

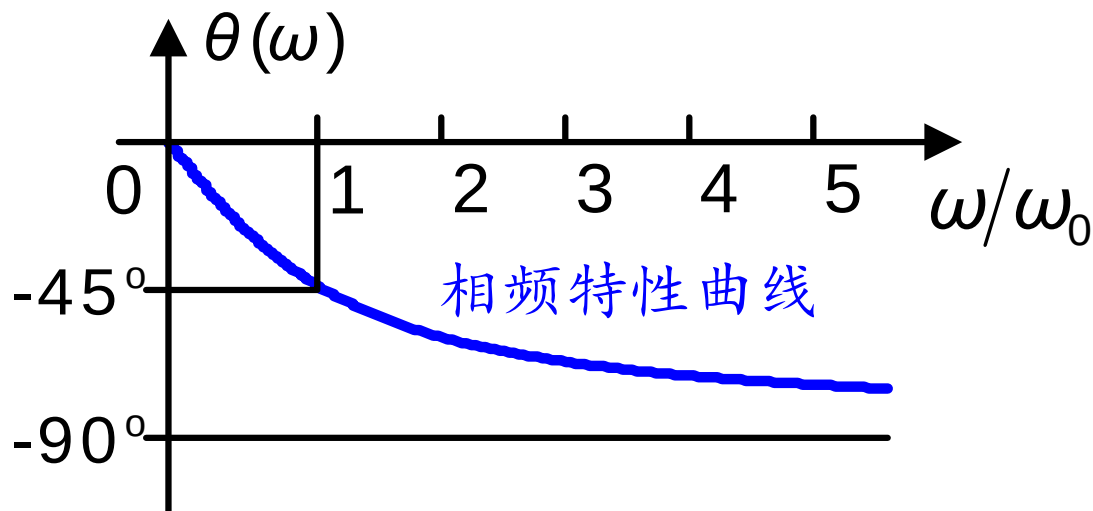
- 低频信号顺利通过
- 高频信号产生较大衰减

幅频特性和相频特性曲线

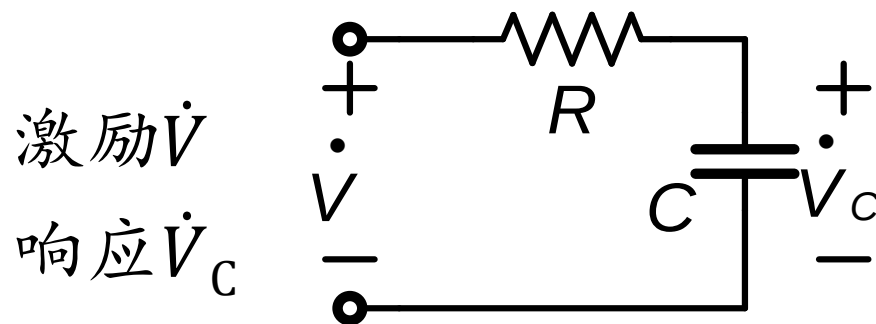
相频特性

- 频率越高，输出电压滞后于输入电压的相位差越大
- $\omega = \omega_c$ 时， $\dot{V}_c$ 比 $\dot{V}$ 滞后 45°

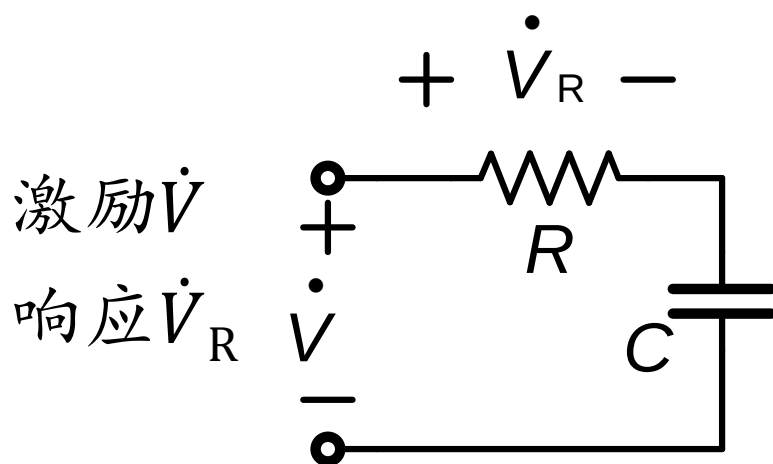
截止频率 ω_c



幅频特性和相频特性曲线

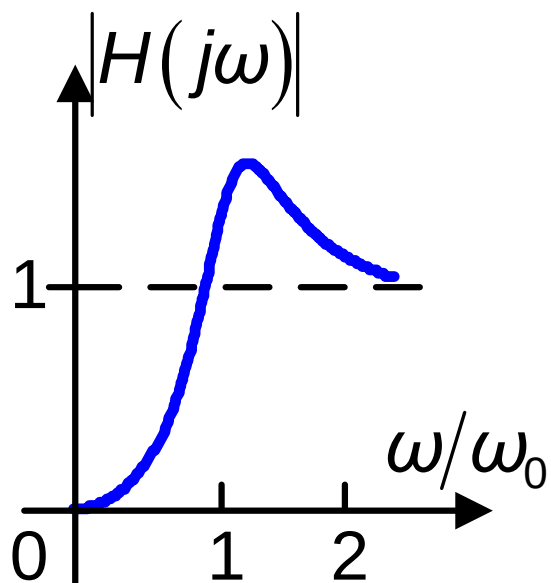


RC高通网络

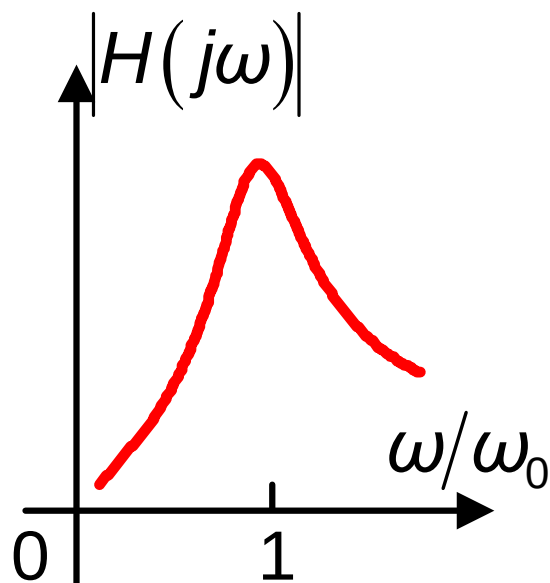


- 频率越高，容抗越小；
 $\omega \rightarrow \infty$ 时，电阻电压趋于输入电压
- 频率越低，容抗越大；
 $\omega \rightarrow 0$ 时，容抗无穷大，
电阻电压和电流趋于0

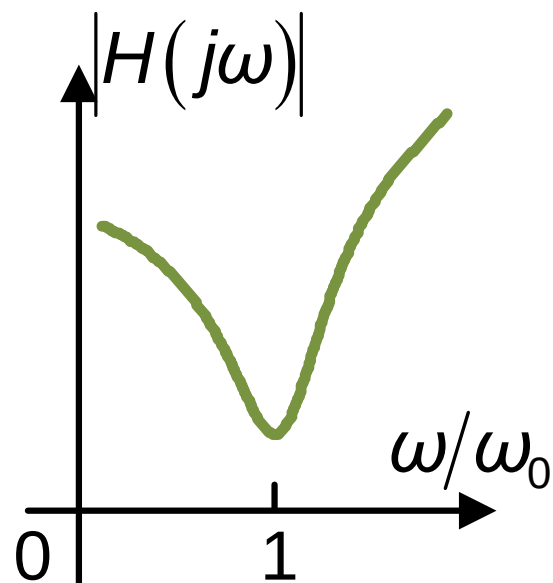
高通网络、带通网络和带阻网络



高通网络



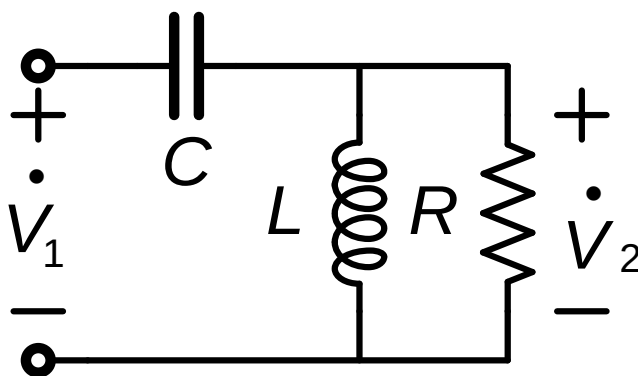
带通网络



带阻网络

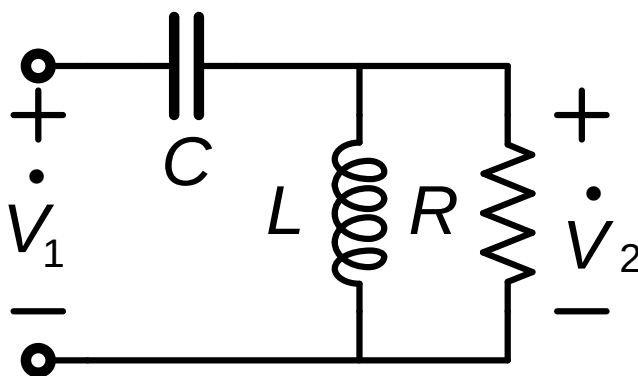
例题

- 求图示电路的网络函数 $H(j\omega) = \dot{V}_2/\dot{V}_1$



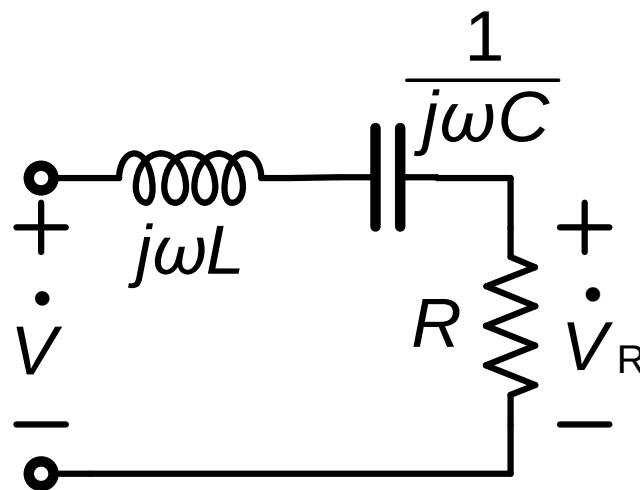
例题

- 求图示电路的网络函数 $H(j\omega) = \dot{V}_2/\dot{V}_1$



$$H(j\omega) = \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_1} = \frac{\frac{j\omega L \times R}{j\omega L + R}}{\frac{j\omega L \times R}{j\omega L + R} + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{-\omega^2}{-\omega^2 + j\frac{\omega}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

RLC串联电路的频率特性



- 考虑电阻电压 $\dot{V}_R$ 为响应时，网络函数(转移电压比)为：

$$H_R(j\omega) = \frac{\dot{V}_R}{\dot{V}} = \frac{R}{R + j\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]}$$

响应：电阻电压

$$H_R(j\omega) = \frac{\dot{V}_R}{\dot{V}} = \frac{R}{R + j[\omega L - 1/(\omega C)]}$$

- 当频率达到RLC串联电路的谐振角频率 ω_0 时，转移电压比的模最大

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- 定义特性阻抗

$$\rho = \omega_0 L = 1/\omega_0 C$$

- 定义品质因数

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \\ = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

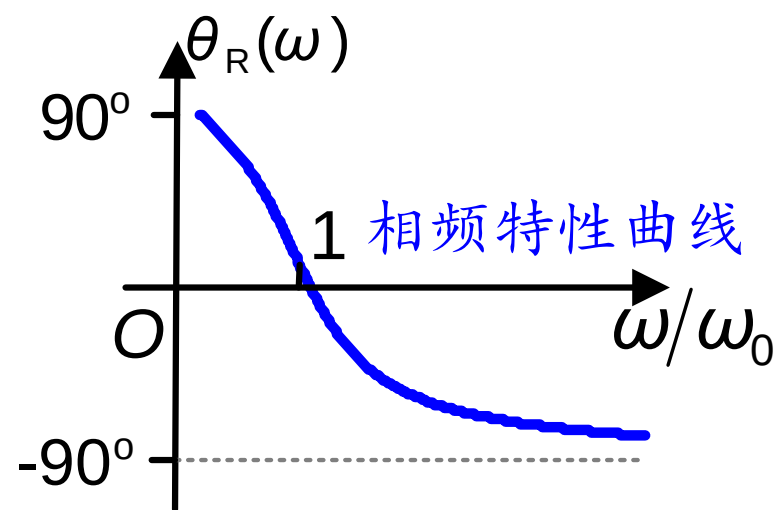
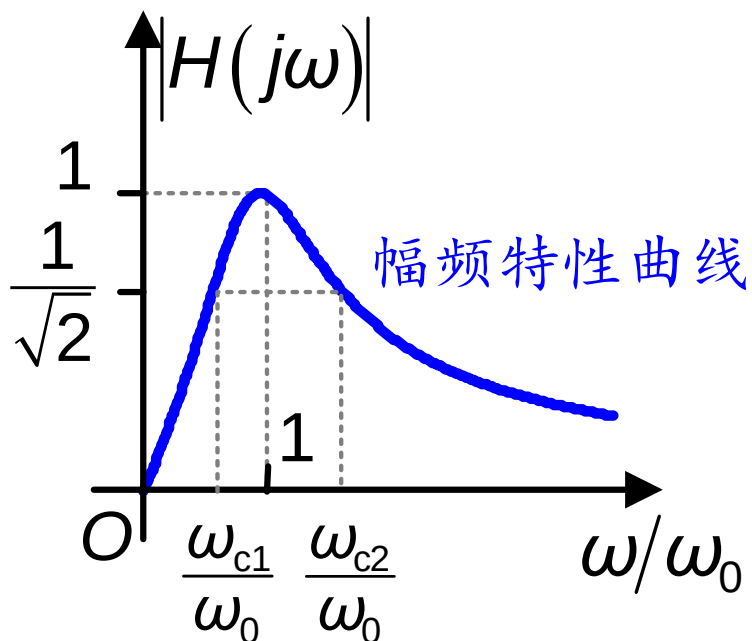
响应：电阻电压

幅频特性 $|H_R(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$

相频特性 $\theta_R(\omega) = -\arctan Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$

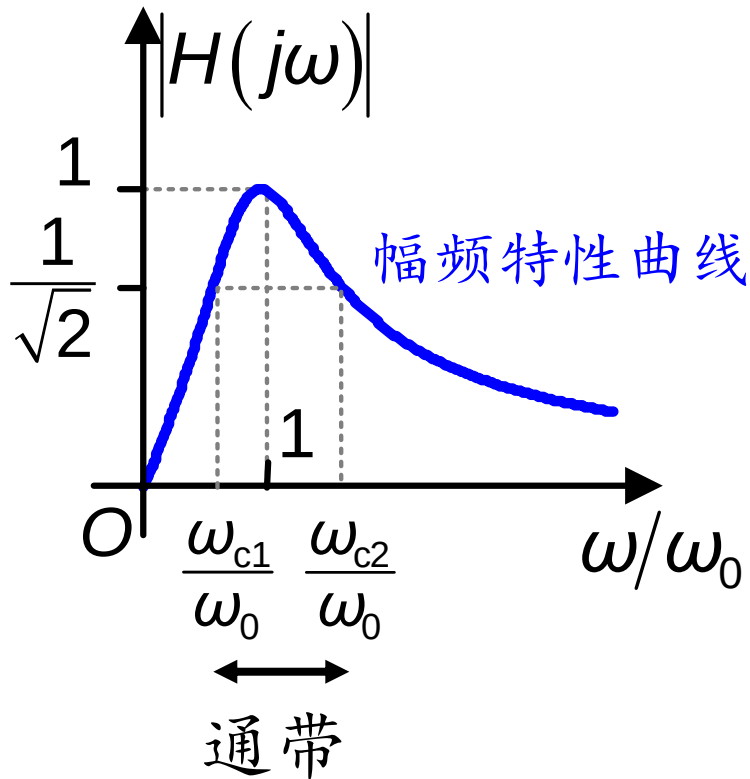
- $\omega/\omega_0 = 0$: $|H_R(j\omega)| = 0$, $\theta_R(\omega) = 90^\circ$
- $\omega/\omega_0 < 1$: $|H_R(j\omega)|$ 单调增加
- $\omega/\omega_0 = 1$: $|H_R(j\omega)| = 1$ (最大), $\theta_R(\omega) = 0$
- $\omega/\omega_0 > 1$: $|H_R(j\omega)| = 1$ (最大), $\theta_R(\omega) = 0$
- $\omega/\omega_0 \rightarrow \infty$: $|H_R(j\omega)| = 0$, $\theta_R(\omega) = -90^\circ$

响应：电阻电压



RLC带通网络

响应：电阻电压



- 截止频率：模下降至最大值的 $1/\sqrt{2}$

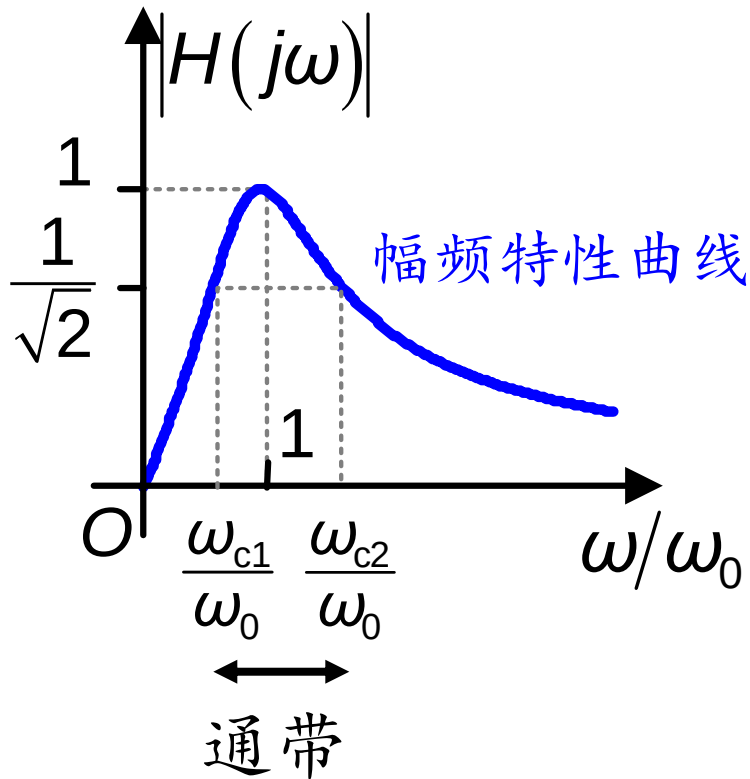
$$\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\omega_{c1} = \omega_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right)$$

$$\omega_{c2} = \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right)$$

响应：电阻电压

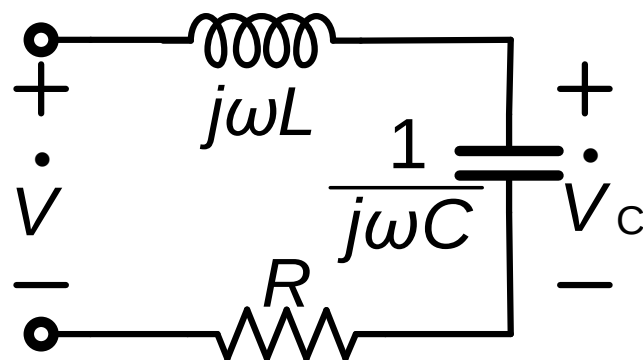


- 通带宽度

$$\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \omega_0/Q$$

- 电阻越小，品质因数 Q 越高，通带宽度越窄

响应：电容电压



- 考虑电容电压 $\dot{V}_C$ 为响应时，网络函数(转移电压比)：

$$\begin{aligned}
 H_C(j\omega) &= \frac{\dot{V}_C}{\dot{V}} = \frac{1/(j\omega C)}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)} \\
 &= \frac{1}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] + j\frac{1}{Q}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}
 \end{aligned}$$

响应：电容电压

• 幅频特性

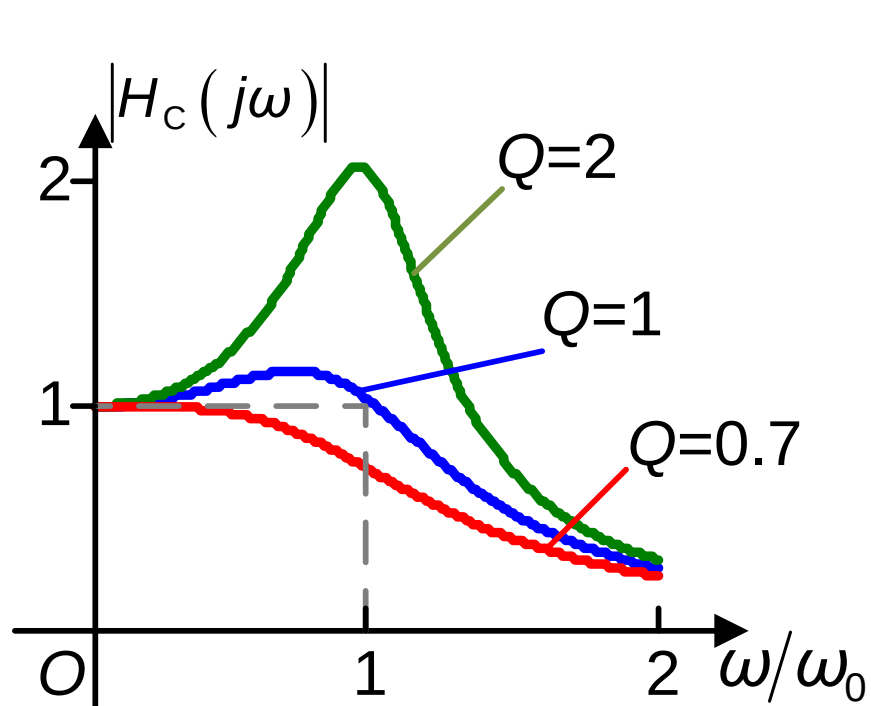
$$|H_C(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

• 相频特性

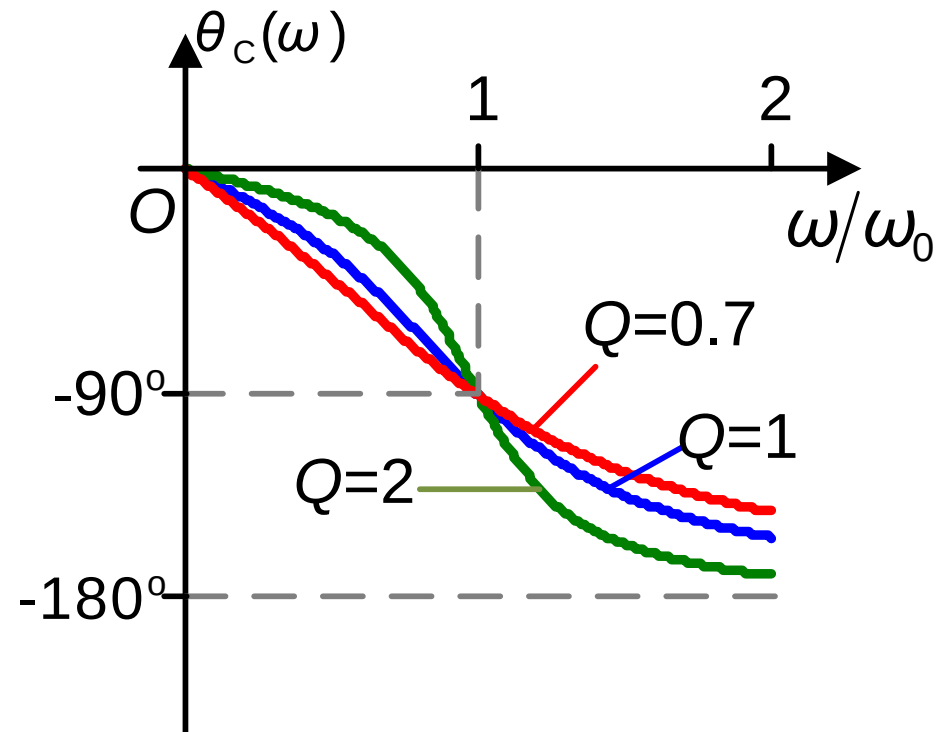
$$\theta_C(\omega) = -\arctan \frac{1}{Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)}$$

- $\omega/\omega_0 = 0$:
 $|H_C(j\omega)| = 1$
 $\theta_C(\omega) = 0$
- $\omega/\omega_0 = 1$:
 $|H_C(j\omega)| = Q$
 $\theta_C(\omega) = -90^\circ$
- $\omega/\omega_0 \rightarrow \infty$:
 $|H_C(j\omega)| = 0$
 $\theta_C(\omega) = -180^\circ$

响应：电容电压



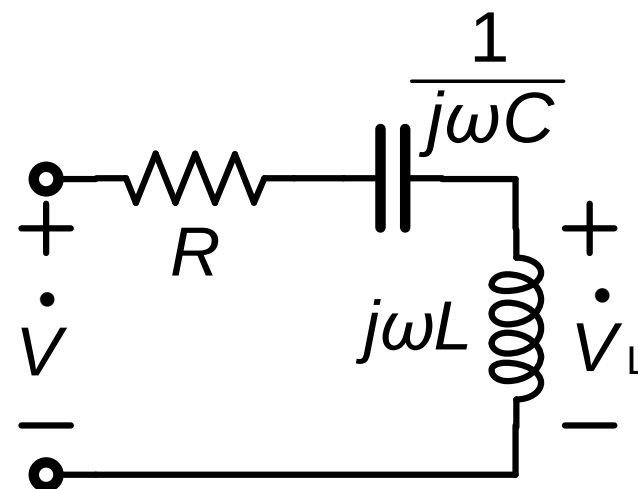
幅频特性曲线



相频特性曲线

响应：电感电压

- 考虑电感电压 $\dot{U}_L$ 为响应时，网络函数(转移电压比)：



$$\begin{aligned}
 H_L(j\omega) &= \frac{\dot{V}_L}{\dot{V}} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)} \\
 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) - \frac{jR}{\omega L}} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right] - j\frac{1}{Q}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)}
 \end{aligned}$$

响应：电感电压

• 幅频特性

$$|H_L(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

• 相频特性

$$\theta_L(\omega) = -\arctan \frac{-1}{Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$\bullet \quad \omega/\omega_0 = 0:$$

$$|H_L(j\omega)| = 0$$

$$\theta_L(\omega) = 180^\circ$$

$$\bullet \quad \omega/\omega_0 = 1:$$

$$|H_L(j\omega)| = Q$$

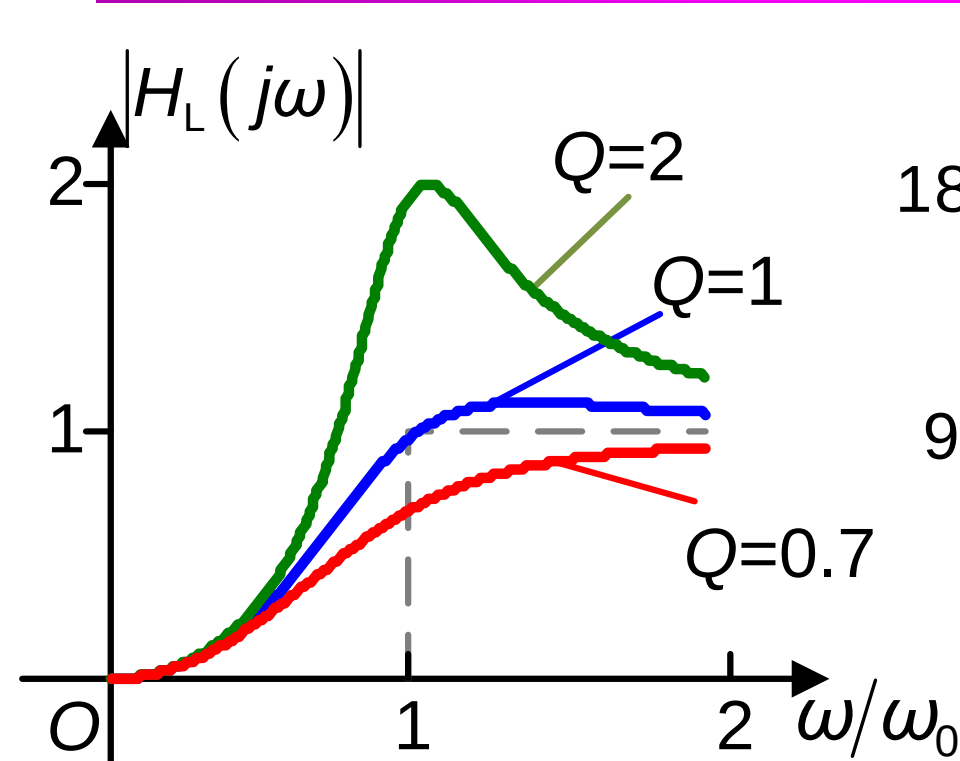
$$\theta_L(\omega) = 90^\circ$$

$$\bullet \quad \omega/\omega_0 \rightarrow \infty:$$

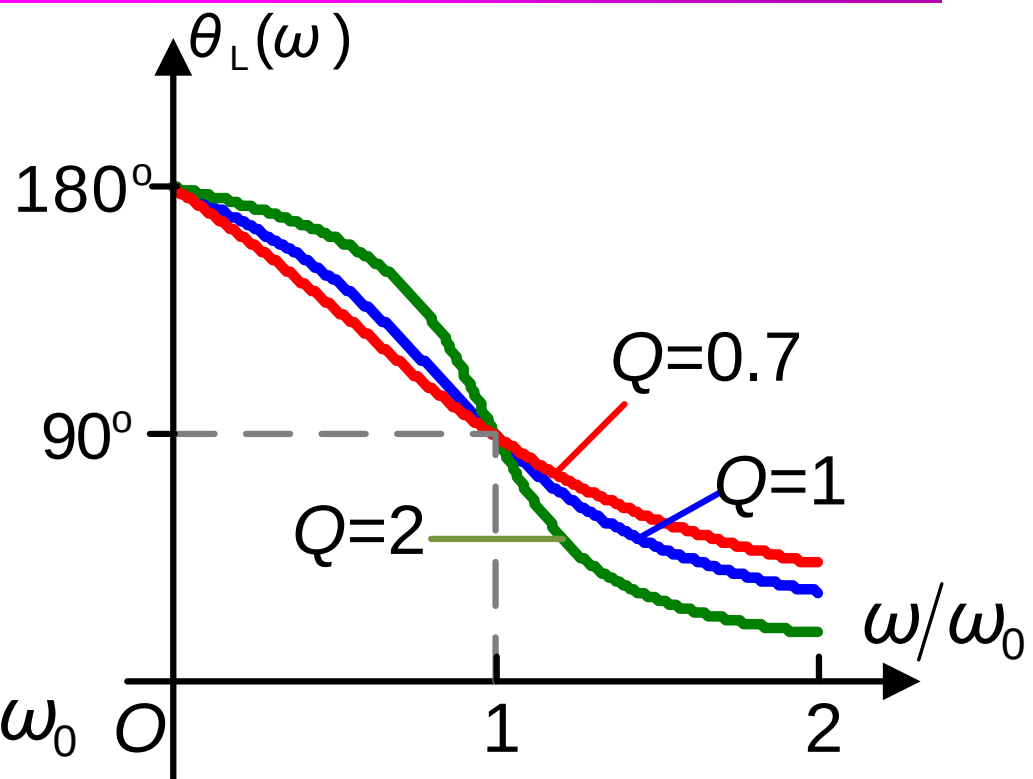
$$|H_L(j\omega)| = 1$$

$$\theta_L(\omega) = 0$$

响应：电感电压



幅频特性曲线



相频特性曲线

例题

设计 RLC 带通滤波器电路，已知总电阻为 $R = 20\Omega$ ，要求谐振频率为 $f_0 = 10^4\text{Hz}$ ，带宽为 $\Delta f = 10^3\text{Hz}$ ，求电感 L 和电容 C 的值以及低频截止频率和高频截止频率。

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = 10$$

$$C = \frac{1}{QR\omega_0} = \frac{1}{10 \times 20 \times (2\pi \times 10^4)} \approx 0.0796 \mu\text{F}$$

$$L = \frac{QR}{\omega_0} = \frac{10 \times 20}{(2\pi \times 10^4)} \approx 3.18 \text{ mH}$$

例题

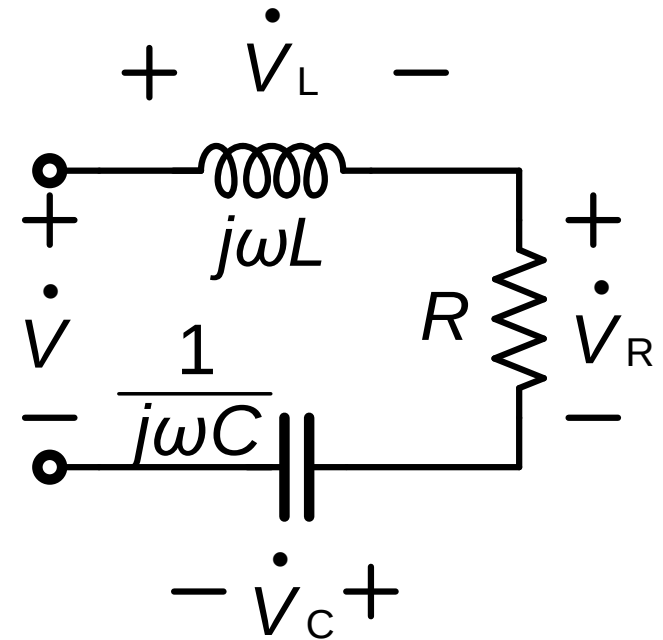
设计 RLC 带通滤波器电路，已知总电阻为 $R = 20\Omega$ ，要求谐振频率为 $f_0 = 10^4\text{Hz}$ ，带宽为 $\Delta f = 10^3\text{Hz}$ ，求电感 L 和电容 C 的值以及低频截止频率和高频截止频率。

$$f_{c1} = f_0 \left(-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right) \approx f_0 \left(-\frac{1}{2Q} + 1 \right) = 9500 \text{ Hz}$$

$$f_{c2} = f_0 \left(+\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1} \right) \approx f_0 \left(+\frac{1}{2Q} + 1 \right) = 10500 \text{ Hz}$$

串联谐振电路

- 谐振：
 - 含有电感和电容的一端口电路
 - 在一定条件下呈现电阻性，即端口电压与电流同相位
 - 称一端口电路发生**谐振** (resonance)



RLC 串联电路

串联谐振电路

- 阻抗

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

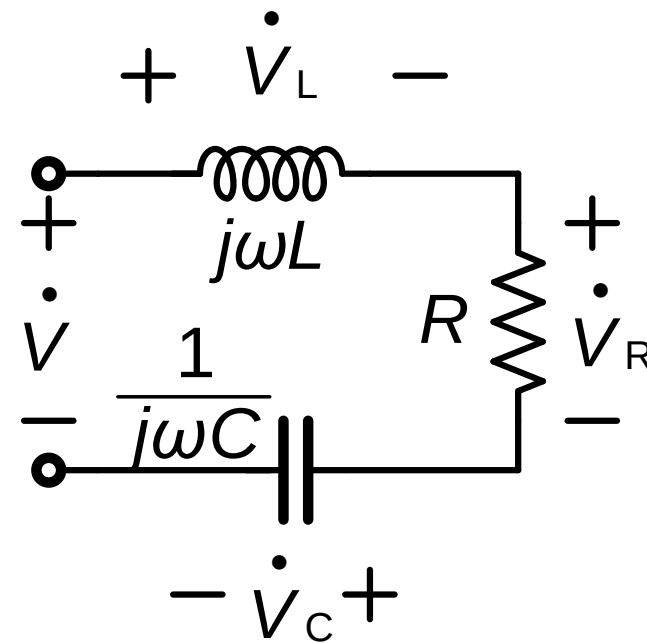
- 发生谐振的条件

$$\omega L = 1/(\omega C)$$

– 改变电源频率

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

RLC串联电路的谐振角频率



RLC串联（谐振）电路

串联谐振电路

- 阻抗

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

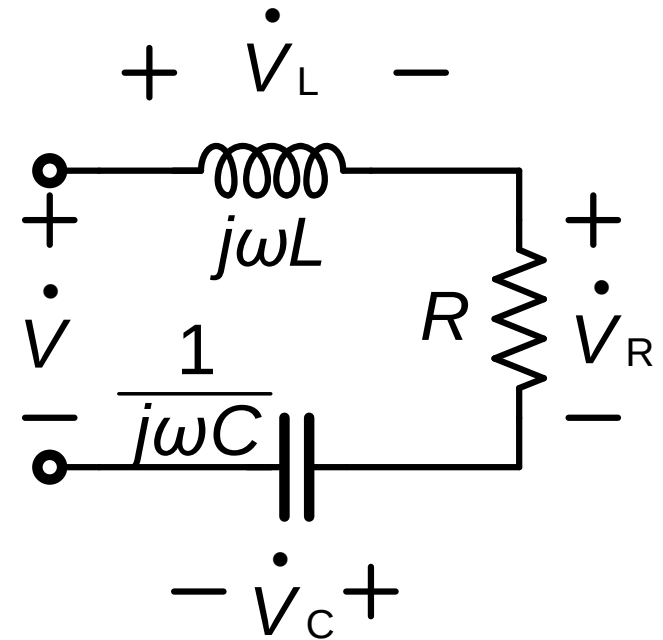
- 发生谐振的条件

$$\omega L = 1/(\omega C)$$

- 改变电源频率

- 改变电感

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C}$$



RLC串联（谐振）电路

串联谐振电路

- 阻抗

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

- 发生谐振的条件

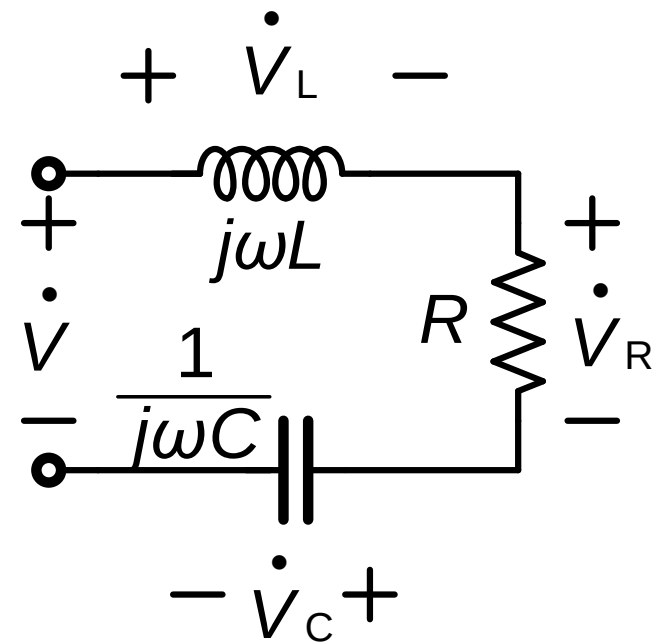
$$\omega L = 1/(\omega C)$$

- 改变电源频率

- 改变电感

- 改变电容

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L}$$



RLC串联（谐振）电路

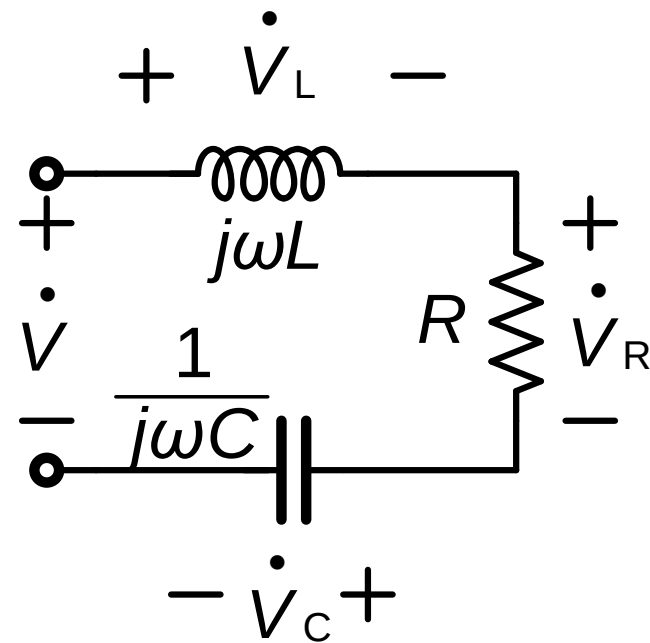
串联谐振电路

- RLC 串联电路的电流、电感电压和电容电压

$$i = \frac{\dot{V}_R}{R} = H_R(j\omega) \frac{\dot{V}}{R}$$

$$\dot{V}_C = H_C(j\omega) \dot{V}$$

$$\dot{V}_L = H_L(j\omega) \dot{V}$$



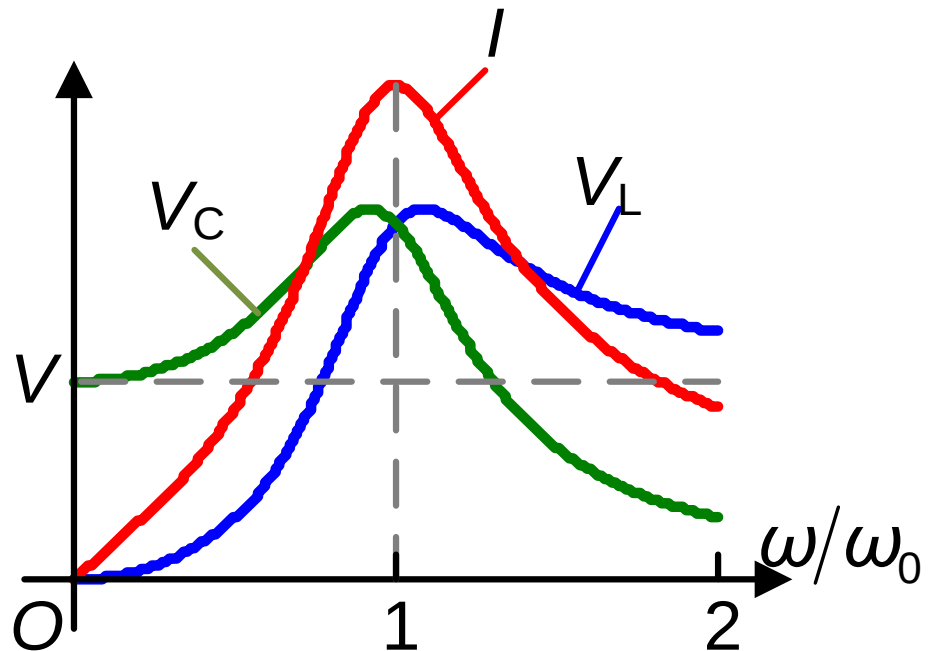
RLC 串联（谐振）电路

串联谐振电路

- 谐振时：
 - 阻抗：感抗与容抗相抵消，阻抗达到最小值 (R)
 - 电流：达到最大值

$$\omega_0 L = 1/(\omega_0 C)$$

$$i_0 = \frac{\dot{V}}{R}$$



RLC串联电路谐振曲线

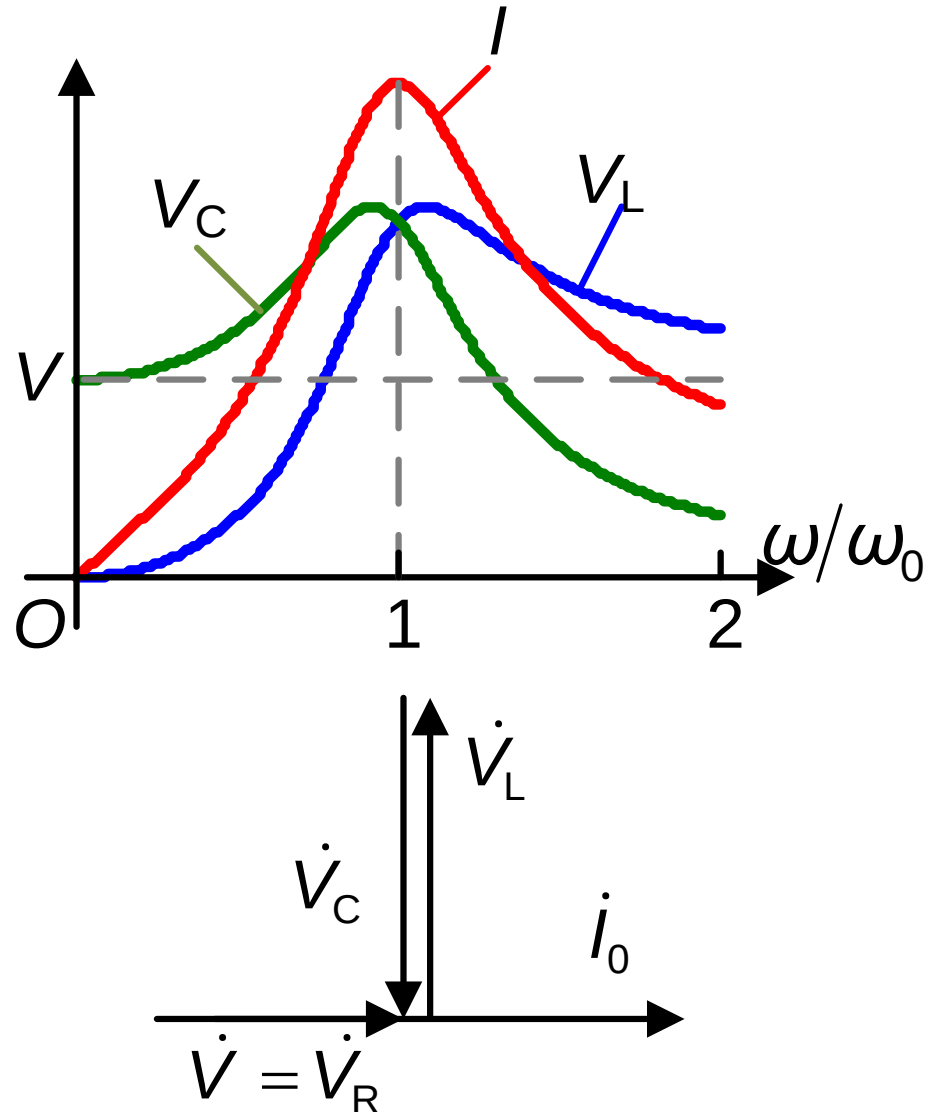
串联谐振电路

- 谐振时电压：

- $\dot{V}_L$ 和 $\dot{V}_C$ 相位相反，完全抵消
- 端口电压=电阻电压
- 又可称为电压谐振

$$\dot{V}_C = -j \frac{1}{\omega_0 C} \dot{i}_0$$

$$\dot{V}_L = j\omega_0 L \dot{i}_0$$



串联谐振电路

- 品质因数与谐振时电压的关系

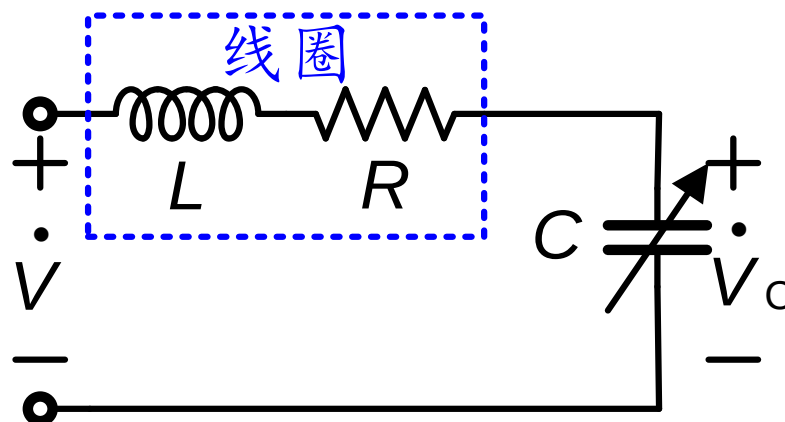
$$\left. \begin{aligned} Q &= \rho / R \\ \rho &= \omega_0 L = 1/(\omega_0 C) \end{aligned} \right\} V_L = V_C = \rho I_0 = \rho \frac{V}{R} = QV$$

- 品质因数：谐振时电感/电容电压与电源电压之比
- 若品质因素Q非常大，谐振时电感/电容电压可能远大于电源电压
 - 电气设备：可能击穿设备绝缘
 - 通信工程：选择信号

例题

一个线圈与电容相串联，线圈电阻 $R = 16.2 \Omega$ ，电感 $L = 0.26 \text{ mH}$ ，当把电容调节到 100 pF 时发生串联谐振。

- (1) 求谐振频率和品质因数；
- (2) 设外加电压为 $10 \mu\text{V}$ ，其频率等于电路的谐振频率，求电路中的电流和电容电压；
- (3) 若外加电压仍为 $10 \mu\text{V}$ ，但其频率比谐振频率高10%，再求电容电压



例题

一个线圈与电容相串联，线圈电阻 $R=16.2\Omega$ ，电感 $L=0.26\text{mH}$ ，当把电容调节到 100pF 时发生串联谐振。

(1) 谐振频率和品质因数；

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.26 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^{-12}}} = 990 \times 10^3 \text{ Hz}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{2\pi \times 990 \times 10^3 \times 0.26 \times 10^{-3}}{16.2} = 100$$

例题

一个线圈与电容相串联，线圈电阻 $R=16.2\Omega$ ，电感 $L=0.26\text{mH}$ ，当把电容调节到 100pF 时发生串联谐振。

(2) 设外加电压为 $10\mu\text{V}$ ，其频率等于电路的谐振频率，求电路中的电流和电容电压；

$$I_0 = \frac{V}{R} = \frac{10 \times 10^{-6}}{16.2} = 0.617 \mu\text{A}$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega_0 C} = -\frac{1}{(2\pi \times 990 \times 10^3) \times 100 \times 10^{-12}} = -1620 \Omega$$

$$V_C = |X_C| I_0 = 1620 \times 0.617 \times 10^{-6} \approx 0.995 \text{ mV}$$

$$V_C = QV = 100 \times 10 \times 10^{-6} = 1\text{mV}$$

例题

(3) 若外加电压仍为 $10\mu\text{V}$ ，但其频率比谐振频率高10%，再求电容电压

$$f' = (1 + 0.1)f_0 = 1.1 \times 990 \times 10^3 = 1089 \times 10^3 \text{ Hz}$$

$$X'_L = \omega' L = (2\pi \times 1089 \times 10^3) \times 0.26 \times 10^{-3} = 1780 \Omega$$

$$X'_C = -\frac{1}{\omega' C} = -\frac{1}{(2\pi \times 1089 \times 10^3) \times 100 \times 10^{-12}} = -1460 \Omega$$

$$|Z'| = \sqrt{R^2 + (X'_L + X'_C)^2} = \sqrt{(16.2)^2 + (1780 - 1460)^2} = 320 \Omega$$

$$U'_C = \frac{V}{|Z'|} \times |X'_C| = \frac{10 \times 10^{-6}}{320} \times 1460 = 0.046 \text{ mV}$$

并联谐振电路

- GCL并联电路的导纳

$$Y = G + j(\omega C - 1/(\omega L))$$

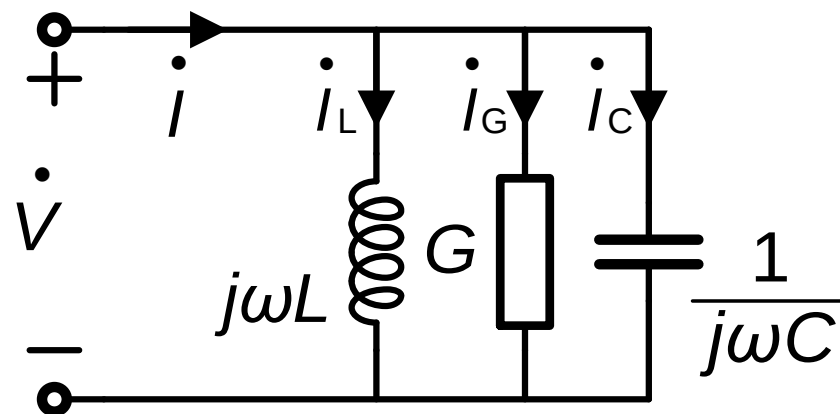
$$= G + jB$$

- 实现谐振的条件

$$\omega C - 1/(\omega L) = 0$$

- 谐振角频率

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$



GCL并联电路的导纳

并联谐振电路

- 并联谐振时：
 - 导纳达到最小值： $|Y| = G$
 - 在总电流有效值一定的条件下，并联电压达到最大： $\dot{V}_0 = \dot{I}/Y = \dot{I}/G$
 - 电感和电容中产生较大电流(但不是最大)

$$\dot{I}_L = \dot{V}_0 / (j\omega_0 L) = -j\dot{I} / (\omega_0 L G)$$

$$\dot{I}_C = j\omega_0 C \dot{V}_0 = j\omega_0 C \dot{I} / G$$

}

有效值相等

相位相反

相互抵消
 - 并联谐振是由于电流抵消引起的→电流谐振

并联谐振电路

- 品质因数

$$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

线圈与电容并联谐振电路

- 等效导纳

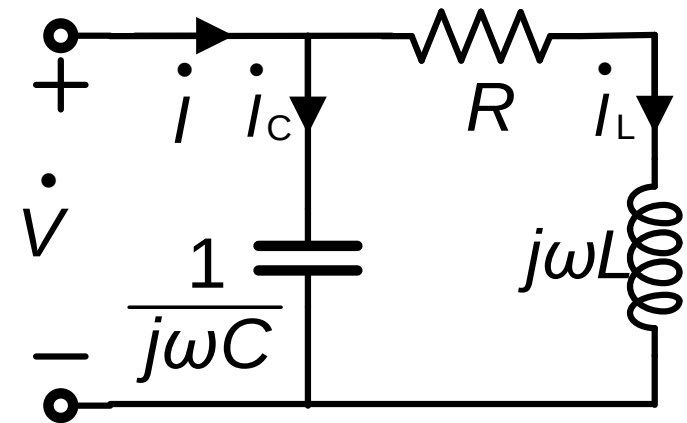
$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j \left[\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right]$$

- 谐振电容

$$C_0 = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

- 谐振角频率

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \quad \left(\text{当 } R < \sqrt{L/C} \text{ 时, 存在; 当 } R > \sqrt{L/C}, \text{ 电路为容性} \right)$$



线圈与电容并联电路

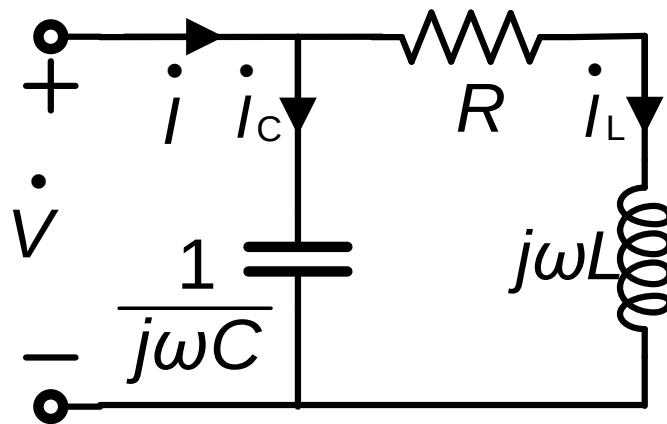
线圈与电容并联谐振电路

- 谐振电感

$$L_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\omega^2 C^2 R^2}}{2\omega^2 C}$$

当 $R < 1/(2\omega C)$ 时，存在两个解；

当 $R > 1/(2\omega C)$ 时，改变电感无法达到谐振



线圈与电容并联电路

线圈与电容并联谐振电路

- 谐振时：
 - 等效阻抗是一个电阻

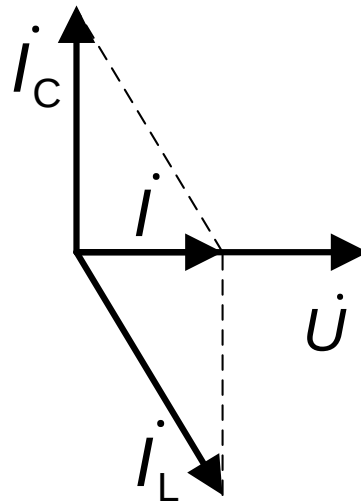
$$R_0 = \frac{R^2 + (\omega_0 L)^2}{R}$$

- 代入谐振角频率

$$R_0 = R + \frac{L^2}{R} \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \right) = \frac{L}{RC}$$

线圈与电容并联谐振电路

- 采用一定的电流源激励
 - 谐振时阻抗接近最大值，电压也接近最大值
 - 线圈和电容产生的电流可能比电源电流大得多



线圈与电容并联谐振电路

- 采用一定的电流源激励
 - 谐振时阻抗接近最大值，电压也接近最大值
 - 线圈和电容产生的电流可能比电源电流大得多
- 采用一定的电压源激励
 - 谐振时端口电流接近最小值
 - 若线圈电阻趋向于0，谐振阻抗趋向无穷大，无电流流过
 - 电感和电容中存在有效值相等、相位相反的电
流

例题

一个电感为 0.25 mH ，电阻为 $25\ \Omega$ 的线圈与 85 pF 的电容器接成并联电路，试求该并联电路的谐振频率和谐振时的阻抗。

例题

一个电感为0.25 mH，电阻为25 Ω 的线圈与85 pF的电容器接成并联电路，试求该并联电路的谐振频率和谐振时的阻抗。

谐振角频率：

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \sqrt{\frac{1}{0.25 \times 10^{-3} \times 85 \times 10^{-12}} - \frac{25^2}{(0.25 \times 10^{-3})^2}} \\ &= \sqrt{4.7 \times 10^{13} - 10^{10}} \approx 6.86 \times 10^6 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

谐振频率：

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{6.86 \times 10^6}{2\pi} \approx 1092 \text{ kHz}$$

例题

一个电感为0.25 mH，电阻为25 Ω 的线圈与85 pF的电容器接成并联电路，试求该并联电路的谐振频率和谐振时的阻抗。

谐振阻抗：

$$Z = R_0 = \frac{L}{RC} = \frac{0.25 \times 10^{-3}}{25 \Omega \times 85 \times 10^{-12}} = 118 \text{k}\Omega$$