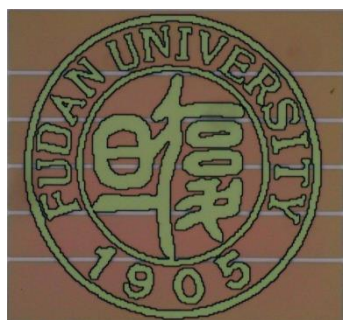




电路基础

(Fundamentals of Electric Circuits, INF0120002.07)

2019年05月23日

唐长文 教授

zwtang@fudan.edu.cn

<http://rfic.fudan.edu.cn/Courses.htm>

复旦大学/微电子学院/射频集成电路设计研究小组

版权©2019，版权保留，侵犯必究

第九章 线性动态电路的复频域分析

- 拉普拉斯变换及其基本性质
- 拉普拉斯逆变换
- 复频域中的电路定理和电路模型
- 拉普拉斯变换分析线性动态电路的暂态过程
- 复频域网络函数

拉普拉斯变换和逆变换

拉普拉斯变换

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

其中复参量 $s = \sigma + j\omega$ ，也称复频率

拉普拉斯反变换

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} dt$$

原函数 $f(t)$ 和象函数 $F(s)$

单位阶跃函数

$$F(s) = \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-st} dt = \int_{0_+}^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{0_+}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

单位冲激函数

$$F(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{0_-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \times 0} = 1$$

指数函数

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \int_{0_-}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \frac{1}{s + \alpha} e^{-(s+\alpha)t} \Big|_{0_-}^{\infty} = \frac{1}{s + \alpha}$$

常用函数的拉普拉斯象函数

原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$
$\delta(t)$	1	$(1 - \alpha t)e^{-\alpha t}$	$\frac{s}{(s + \alpha)^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$
A	$\frac{A}{s}$	$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$A(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{A\alpha}{s(s + \alpha)}$	$e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{(s + \alpha) \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{(s + \alpha) \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

拉普拉斯变换的基本性质

线性叠加特性

$$\mathcal{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = a\mathcal{L}\{f_1(t)\} + b\mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

例题：1. 求 $f(t) = A(1 - e^{-\alpha t})$ 的象函数 $F(s)$ 。

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{A(1 - e^{-\alpha t})\} = A(\mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\}) \\ &= A\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \alpha}\right) = \frac{A\alpha}{s(s + \alpha)} \end{aligned}$$

2. 求 $f(t) = \sin(\omega t)$ 的象函数 $F(s)$ 。

$$F(s) = \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos \omega t\} &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

微分特性

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0_-)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0_-) - s^{n-2}f^{(1)}(0_-) - \dots - f^{(n-1)}(0_-)$$

求 $f(t) = \cos(\omega t)$ 的象函数 $F(s)$ 。

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\omega} \frac{d\sin(\omega t)}{dt}\right\} \\ &= \frac{1}{\omega} \left[s\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} - \sin(\omega t)\big|_{t=0_-} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

积分特性

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0-}^t f(\xi) d\xi\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

求 $f(t) = t$ 的象函数 $F(s)$ 。

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{t\} = \mathcal{L}\left\{\int_{0-}^t \varepsilon(\xi) d\xi\right\} \\ &= \frac{1}{s} \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

延迟特性

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0)\} = e^{-st_0}F(s)$$

求 $f(t) = A[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-t_0)]$ 的象函数 $F(s)$ 。

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{A[\varepsilon(t) - \varepsilon(t-t_0)]\} = A(\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} - \mathcal{L}\{\varepsilon(t-t_0)\}) \\ &= A\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-st_0}\right) = \frac{A}{s}(1 - e^{-st_0}) \end{aligned}$$

位移特性

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(s + \alpha)$$

求 $f(t) = e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$ 的象函数 $F(s)$ 。

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-\alpha t} \sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

求 $f(t) = e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$ 的象函数 $F(s)$ 。

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-\alpha t} \cos(\omega t)\} = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

卷积特性

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\{f_2(t) * f_1(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} \times \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_1(s)F_2(s)$$

已知激励源 $x(t)$ 和单位冲激响应 $h(t)$ ，求零状态响应 $y(t)$ 。

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}, \quad H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{x(t)\} \times \mathcal{L}\{h(t)\}\}$$

拉普拉斯逆变换

电路响应的象函数通常可以表示为两个实系数的 s 的多项式之比，即 s 的一个有理分式

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (n \geq m)$$

若 $n > m$ 时， $F(s)$ 为真分式。若 $n = m$ 时，

$$F(s) = A + \frac{N_1(s)}{D(s)}$$

其中 $N_1(s)/D(s)$ 为真分式。

分解定理：部分分式展开法

把真分式 $F(s)$ 分解成若干简单项之和，而这些简单项可以通过拉氏变换表中得到，这种方法称为部分分式展开法，也称为分解定理。

真分式进行部分分式展开时，需要对分母多项式做因式分解，求出分母多项式 $D(s) = 0$ 的根。

分母多项式 $D(s) = 0$ 的根可以是单根、共轭复根和重根。

单根

如果分母多项式 $D(s) = 0$ 具有 n 个单根， p_1 、 p_2 、...、 p_n ， $F(s)$ 可以展开为

$$F(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \dots + \frac{K_n}{s - p_n}$$

$$K_i = [(s - p_i)F(s)]_{s=p_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$K_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{(s - p_i)N(s)}{D(s)} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{(s - p_i)N'(s) + N(s)}{D'(s)} = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} = \sum_{i=1}^n \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} e^{p_i t}$$

例题1

求 $F(s) = \frac{2s+1}{s^3+7s^2+10s}$ 的原函数 $f(t)$ 。

$$D(s) = s^3 + 7s^2 + 10s = s(s+2)(s+5) = 0, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = -2, \quad p_3 = -5,$$

$$D'(s) = 3s^2 + 14s + 10$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+5}$$

$$K_1 = \frac{N(p_1)}{D'(p_1)} = \frac{2 \times 0 + 1}{3 \times 0^2 + 14 \times 0 + 10} = \frac{1}{10} \quad K_2 = \frac{N(p_2)}{D'(p_2)} = \frac{2 \times (-2) + 1}{3 \times (-2)^2 + 14 \times (-2) + 10} = \frac{1}{2}$$

$$K_3 = \frac{N(p_3)}{D'(p_3)} = \frac{2 \times (-5) + 1}{3 \times (-5)^2 + 14 \times (-5) + 10} = -\frac{3}{5}$$

$$f(t) = 0.1 + 0.5e^{-2t} - 0.6e^{-5t} \quad (t \geq 0)$$

共轭复根

如果分母多项式 $D(s) = 0$ 具有共轭复根 $p_1 = -\alpha + j\omega$ 和 $p_2 = -\alpha - j\omega$

$$F(s) = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2}$$

$$K_1 = \frac{N(p_1)}{D'(p_1)} = |K_1| e^{j\theta}, \quad K_2 = \frac{N(p_2)}{D'(p_2)} = |K_1| e^{-j\theta}, \quad K_1 = K_2^*$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = K_1 e^{(-\alpha + j\omega)t} + K_2 e^{(-\alpha - j\omega)t} \\ &= |K_1| e^{j\theta} e^{(-\alpha + j\omega)t} + |K_1| e^{-j\theta} e^{(-\alpha - j\omega)t} \\ &= |K_1| e^{-\alpha t} (e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}) = 2|K_1| e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \theta) \end{aligned}$$

例题2

求 $F(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+5}$ 的原函数 $f(t)$ 。

$$D(s) = s^2 + 2s + 5 = 0, \quad p_1 = -1 + j2, \quad p_2 = -1 - j2$$

$$D'(s) = 2s + 2$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s+1-j2} + \frac{K_2}{s+1+j2}$$

$$K_1 = \frac{N(p_1)}{D'(p_1)} = \frac{-1+j2+3}{2(-1+j2)+2} = \frac{1-j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j(-\frac{\pi}{4})}$$

$$K_2 = \frac{N(p_2)}{D'(p_2)} = \frac{-1-j2+3}{2(-1-j2)+2} = \frac{1+j}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$f(t) = 2|K_1|e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \theta) = \sqrt{2}e^{-t} \cos(2t - \frac{\pi}{4}) \quad (t \geq 0)$$

重根

如果分母多项式 $D(s) = 0$ 具有 q 阶重根， p_1 ， $F(s)$ 可以展开为

$$F(s) = \frac{K_{11}}{s - p_1} + \frac{K_{12}}{(s - p_1)^2} + \dots + \frac{K_{1q}}{(s - p_1)^q}$$

$$K_{1i} = \frac{1}{(q-i)!} \left. \frac{d^{q-i} \left[(s - p_1)^q F(s) \right]}{ds^{q-i}} \right|_{s=p_1} \quad i = 1, 2, 3, \dots, q$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{i=1}^q \frac{1}{(i-1)!(q-i)!} \left. \frac{d^{q-i} \left[(s - p_1)^q F(s) \right]}{ds^{q-i}} \right|_{s=p_1} t^{i-1} e^{p_1 t}$$

例题3

求 $F(s) = \frac{1}{(s+1)^3 s^2}$ 的原函数 $f(t)$ 。

$$D(s) = (s+1)^3 s^2 = 0, \quad p_1 = -1, \quad p_2 = 0$$

$$F(s) = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)^3} + \frac{K_{21}}{s} + \frac{K_{22}}{s^2}$$

$$(s+p_1)^3 F(s) = \frac{1}{s^2}, \quad (s+p_2)^2 F(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$K_{21} = \left. \frac{d\left(\frac{1}{(s+1)^3}\right)}{ds} \right|_{s=0} = -3 \quad K_{22} = \left. \frac{1}{(s+1)^3} \right|_{s=0} = 1$$

$$K_{11} = \left. \frac{1}{2!} \frac{d^2\left(\frac{1}{s^2}\right)}{ds^2} \right|_{s=-1} = \left. \frac{1}{2} \frac{6}{s^4} \right|_{s=-1} = 3$$

$$K_{12} = \left. \frac{d\left(\frac{1}{s^2}\right)}{ds} \right|_{s=-1} = \left. \frac{-2}{s^3} \right|_{s=-1} = 2$$

$$K_{13} = \left. \frac{1}{s^2} \right|_{s=-1} = 1$$

$$f(t) = 3e^{-t} + 2te^{-t} + 0.5t^2e^{-t} - 3 + t \quad (t \geq 0)$$

复频域中的电路定理和电路模型

- 基尔霍夫电流定律：流出节点的各支路电流象函数的代数和等于零。

$$\sum I_k(s) = 0$$

- 基尔霍夫电压定律：沿任一回路各支路电压象函数的代数和等于零。

$$\sum V_k(s) = 0$$

- 支路电流法
- 节点电压法
- 置换定理
- 叠加定理
- 等效电源定理
- 特勒根定理
- 互易定理
- 对偶原理

元件的复频域模型

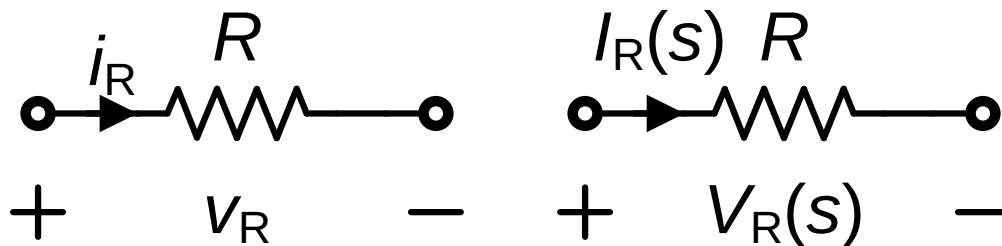
- 电阻
- 电容
- 电感
- 电压源
- 电流源
- 受控源
- 耦合电感
- 理想变压器

电阻元件

- 伏安特性

$$V_R(t) = Ri_R(t) \quad V_R(s) = RI_R(s)$$

- 复频域模型



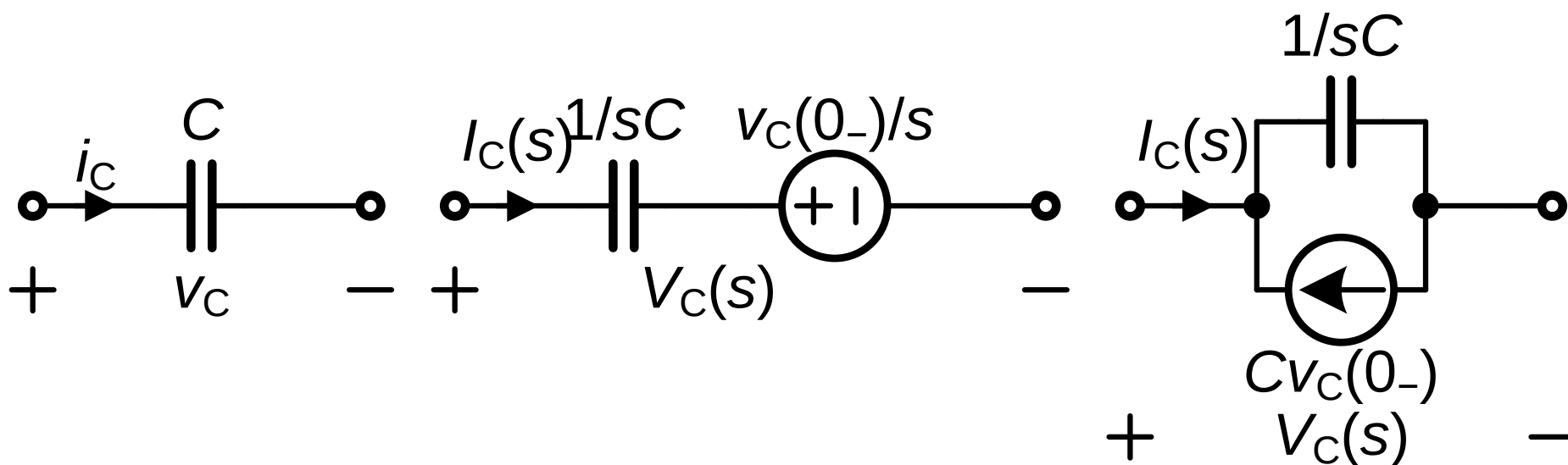
电容元件

- 伏安特性

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}, \quad V_C(s) = \frac{I_C(s)}{sC} + \frac{V_C(0_-)}{s},$$

$$I_C(s) = sCV_C(s) - CV_C(0_-)$$

- 复频域模型

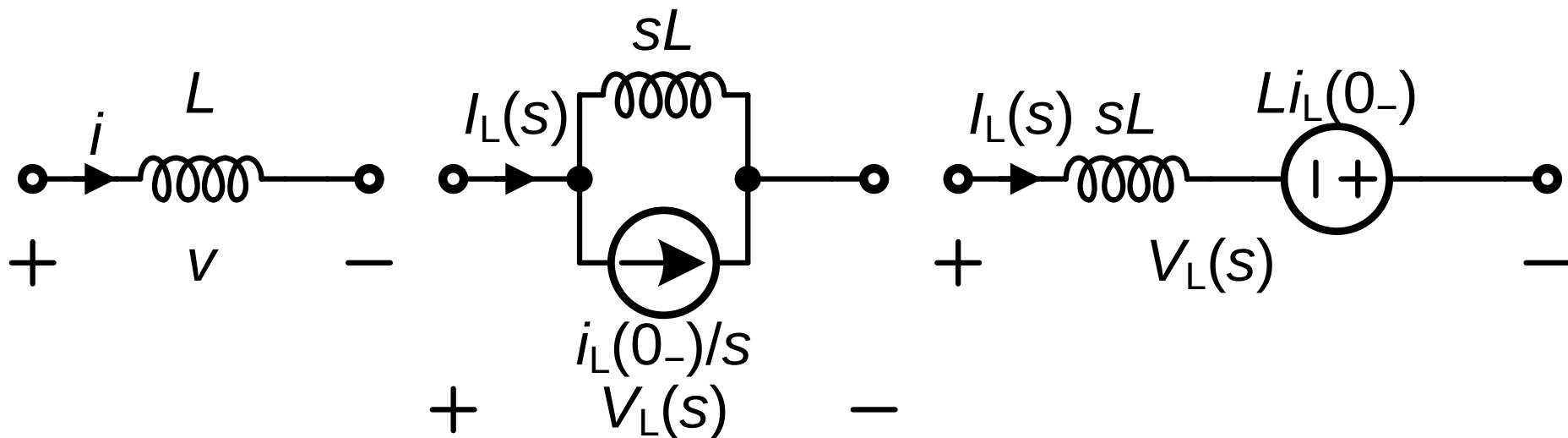


电感元件

- 伏安特性

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad I_L(s) = \frac{V_L(s)}{sL} + \frac{I_L(0_-)}{s}, \quad V_L(s) = sLI_L(s) - LI_L(0_-)$$

- 复频域模型



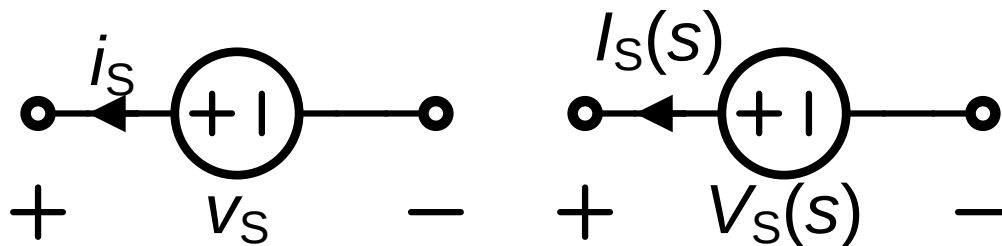
电压源

- 伏安特性

$$V_S(s) = \mathcal{L}\{v_S(t)\}$$

电流象函数 $I_S(s)$ 任意。

- 复频域模型



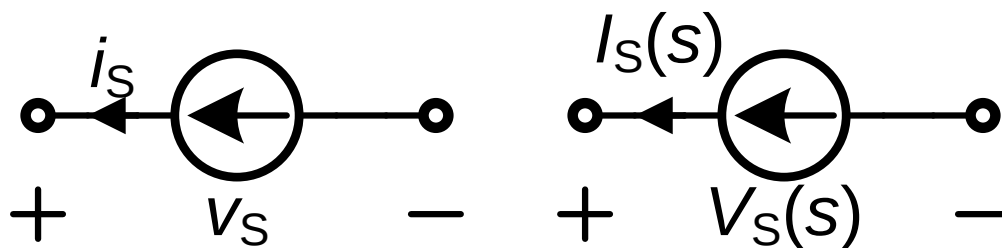
电流源

- 伏安特性

$$I_S(s) = \mathcal{L}\{i_S(t)\}$$

电压象函数 $V_S(s)$ 任意。

- 复频域模型



受控电压源

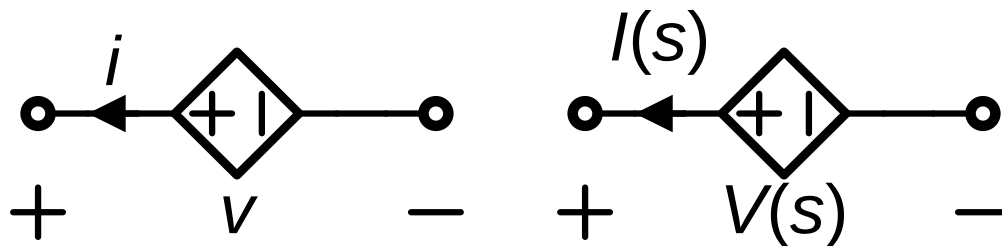
- 伏安特性

- 电压控制电压源， $v(t) = \alpha v_1(t)$, $V(s) = \alpha V_1(s)$,

- 电流控制电压源， $v(t) = z i_1(t)$, $V(s) = z I_1(s)$,

受控电压源的电流象函数任意。

- 复频域模型



$V_1(s)$ 和 $I_1(s)$ 分别表示控制电压和控制电流，控制系数 α 是无量纲量，控制系数 z 的量纲是阻抗。

受控电流源

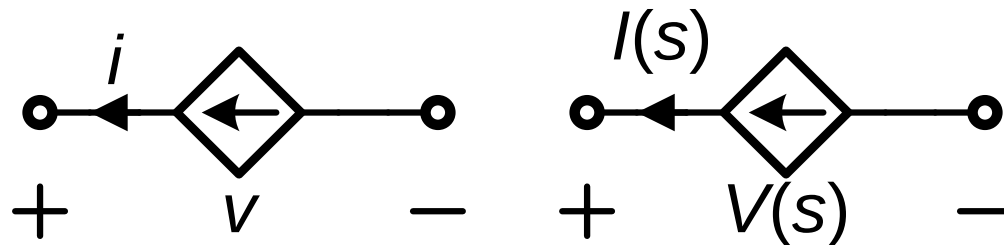
- 伏安特性

- 电压控制电流源, $i(t) = yV_1(t)$, $I(s) = yV_1(s)$,

- 电流控制电流源, $i(t) = \beta i_1(t)$, $I(s) = \beta I_1(s)$,

受控电流源的电压象函数任意。

- 复频域模型



$V_1(s)$ 和 $I_1(s)$ 分别表示控制电压和控制电流，控制系数 β 是无量纲量，控制系数 y 的量纲是跨导。

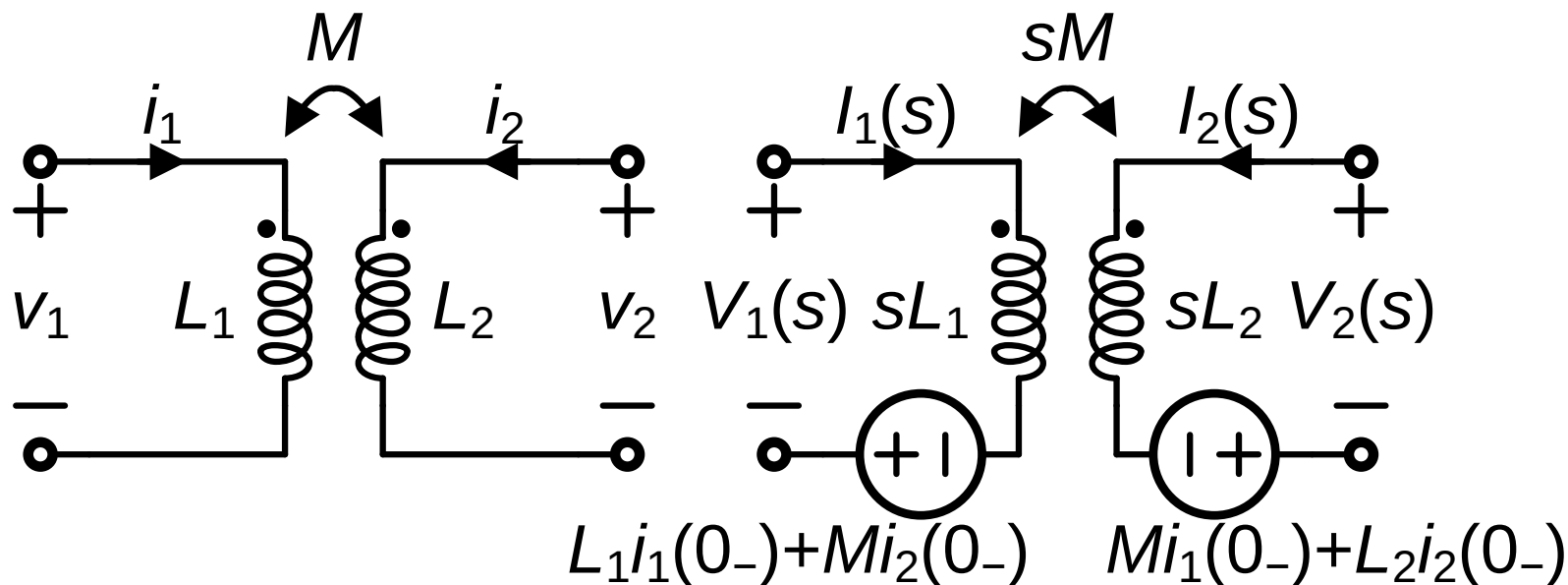
耦合电感

- 伏安特性

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1(s) = sL_1 I_1(s) + sM I_2(s) - [L_1 i_1(0_-) + M i_2(0_-)] \\ V_2(s) = sM I_1(s) + sL_2 I_2(s) - [M i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-)] \end{cases}$$

• 复频域模型

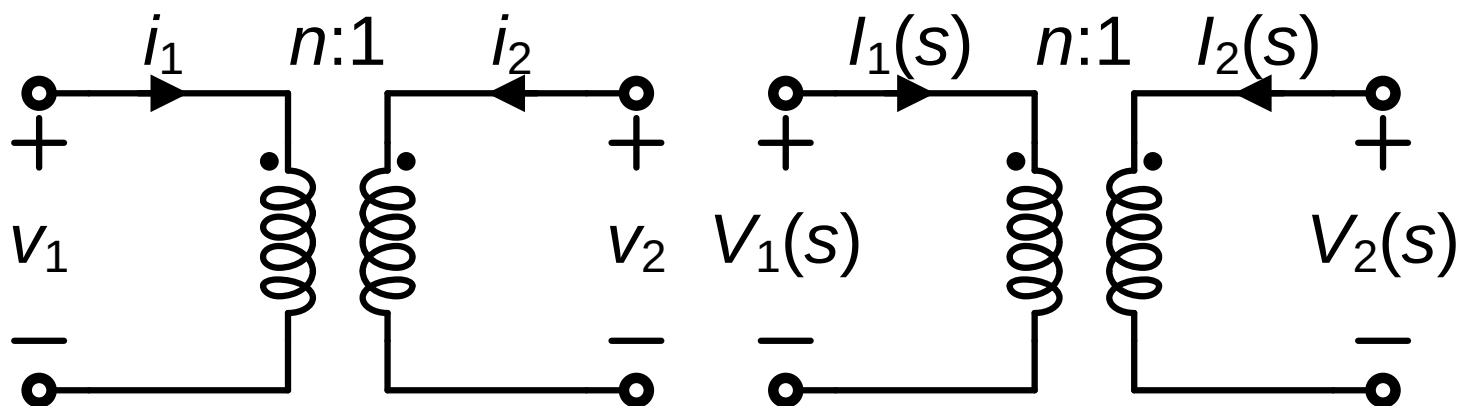


理想变压器

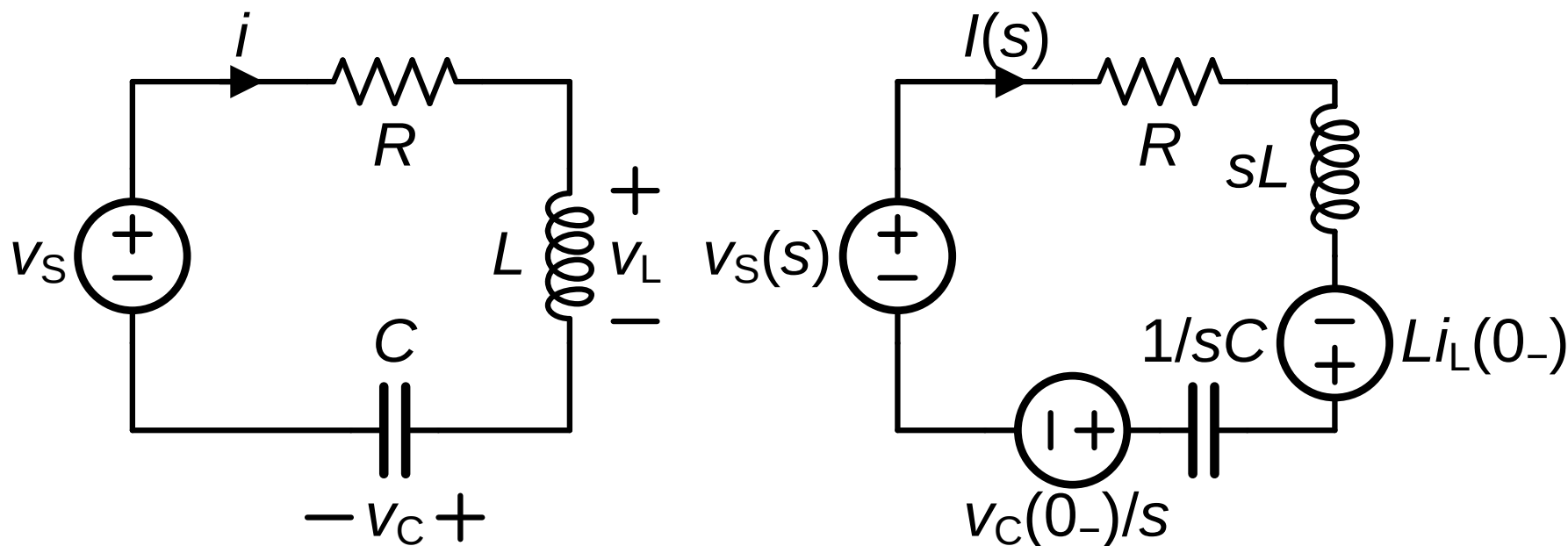
- 伏安特性

$$\begin{cases} v_1(t) = nv_2(t) \\ i_1(t) = -\frac{i_2(t)}{n} \end{cases} \quad \begin{cases} V_1(s) = nV_2(s) \\ I_1(s) = -\frac{I_2(s)}{n} \end{cases}$$

- 复频域模型



复阻抗和复导纳



RLC 串联电路，电源电压 $v_S(t)$ ，电感初始电流 $i_L(0_-)$ ，电容初始电压 $v_C(0_-)$ ，由KVL可得

$$RI(s) + sLI(s) - Li_L(0_-) + \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v_C(0_-)}{s} = V_S(s)$$

$$(R + sL + \frac{1}{sC})I(s) = V_s(s) + Li_L(0_-) - \frac{v_C(0_-)}{s}$$

复阻抗 $Z(s) = (R + sL + \frac{1}{sC})$,

复导纳 $Y(s) = 1/Z(s) = 1 / (R + sL + \frac{1}{sC})$

$$I(s) = \frac{V_s(s)}{Z(s)} + \frac{Li_L(0_-) - \frac{v_C(0_-)}{s}}{Z(s)}$$

零状态响应

零输入响应

拉普拉斯变换分析线性动态电路的暂态过程

采用拉氏变换分析电路的具体步骤：

1. 确定所有电容电压初始值 $v_C(0_-)$ 和电感电流初始值 $i_L(0_-)$ ，将激励源的时域函数变换为复频域象函数。
2. 画出复频域电路，其中初始值 $v_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$ 用附加电源表示， RLC 参数用复频域阻抗表示，所有电路量用象函数表示。
3. 用求解直流电路的方法，求出响应的象函数。
4. 利用部分分式展开方法或积分变换表，将响应的象函数逆变换为原函数。

例题4

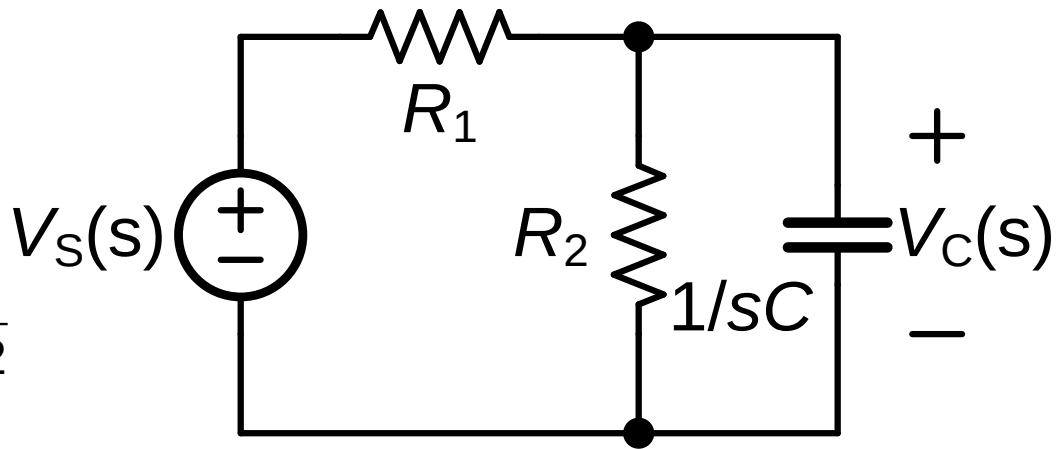
如图所示电路， $v_S(t) = 20e^{-t}\varepsilon(t)$ V， $R_1 = 10\ \Omega$ ， $R_2 = 10\ \Omega$ ， $C = 0.1$ F，试计算 $v_C(t)$ 。

$$V_S(s) = \mathcal{L}\{20e^{-t}\varepsilon(t)\} = \frac{20}{s+1}\text{ V}$$

$$\begin{aligned} V_C(s) &= V_S(s) \frac{R_2 \parallel 1/sC}{R_1 + R_2 \parallel 1/sC} \\ &= \frac{20}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} \end{aligned}$$

$$K_1 = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{20}{(s+1)(s+2)}(s+1) = 20$$

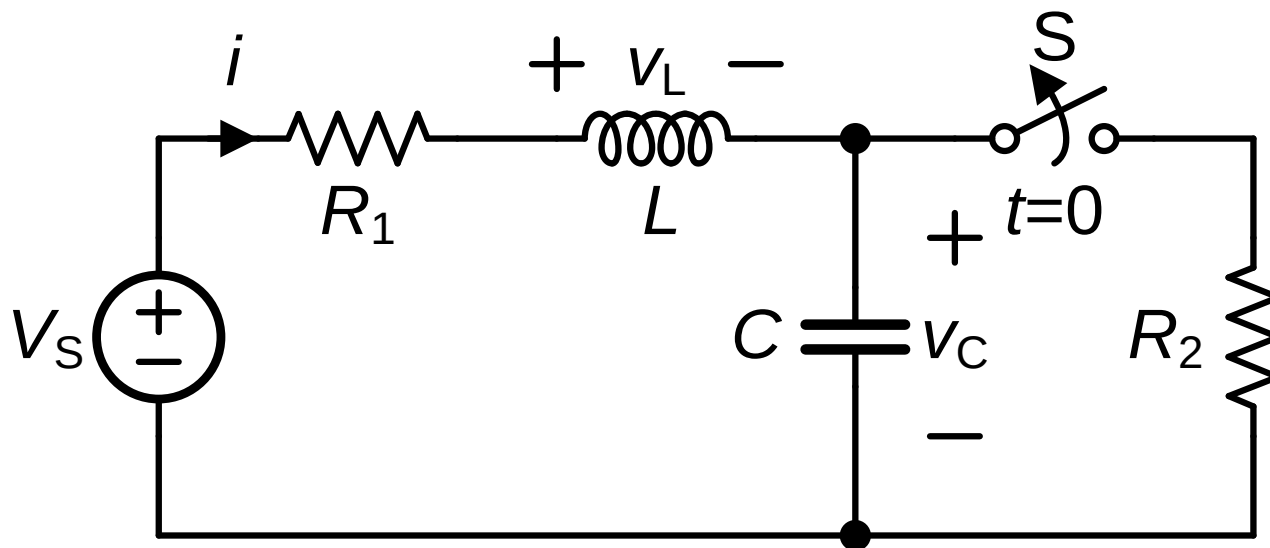
$$K_2 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{20}{(s+1)(s+2)}(s+2) = -20$$



$$v_C(t) = 20e^{-t} - 20e^{-2t} = 20(e^{-t} - e^{-2t})\text{ V} \quad (t \geq 0)$$

例题5

如图所示电路， $V_S = 30\text{ V}$ ， $R_1 = 25\ \Omega$ ， $R_2 = 75\ \Omega$ ， $L = 0.5\text{ H}$ ， $C = 5\text{ mF}$ 。 $t < 0$ 时处于稳定， $t = 0$ 时开关断开，求 $t > 0$ 时的全响应 $v_L(t)$ 和 $v_C(t)$ 。



$$V_S(s) = \frac{30}{s} \text{ V}$$

$$i_L(0_-) = \frac{V_S}{R_1 + R_2} = 0.3 \text{ A}$$

$$v_C(0_-) = V_S \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 22.5 \text{ V}$$

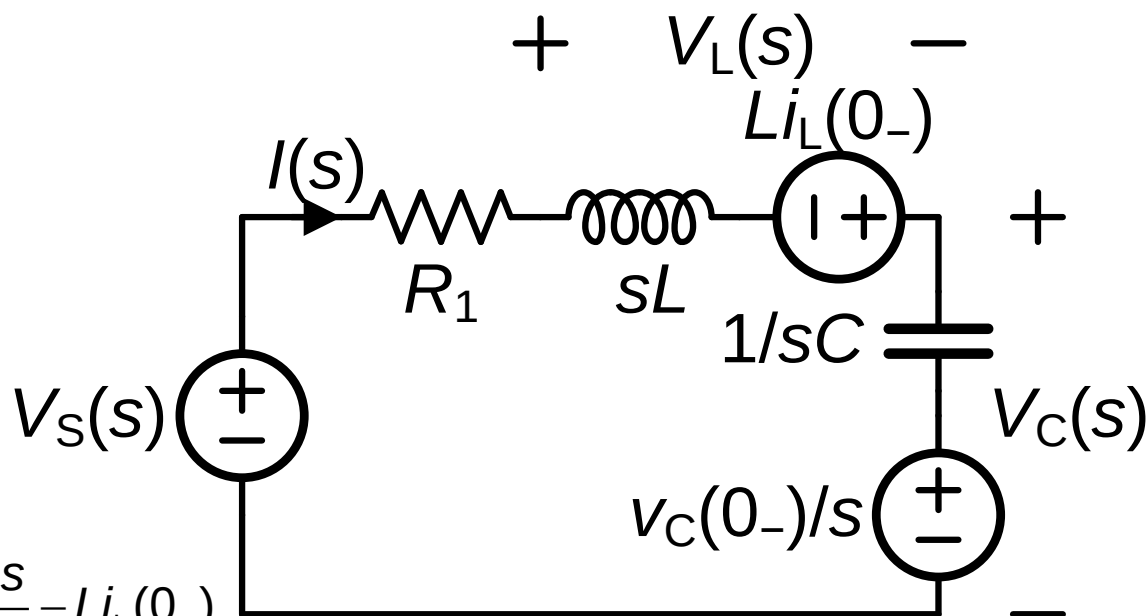
$$V_L(s) = sLI(s) - Li_L(0_-)$$

$$= sL \frac{V_S + Li_L(0_-) - v_C(0_-)/s}{R_1 + sL + 1/sC} - Li_L(0_-)$$

$$= \frac{-60}{s^2 + 50s + 400} = \frac{-2}{s + 10} + \frac{2}{s + 40}$$

$$V_C(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v_C(0_-)}{s} = \frac{22.5s^2 + 1185s + 12000}{s(s^2 + 50s + 400)} = \frac{30}{s} + \frac{-8}{s + 10} + \frac{0.5}{s + 40}$$

$$v_C(t) = (30 - 8e^{-10t} + 0.5e^{-40t}) \text{ V} \quad (t \geq 0)$$



$$v_L(t) = (-2e^{-10t} + 2e^{-40t}) \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

例题6

如图所示电路， $v_S(t) = 10\varepsilon(t)$ V， $R_1 = 9\ \Omega$ ， $R_2 = 1\ \Omega$ ， $C_1 = 1$ F， $C_2 = 4$ F，电路零状态，求电流 $i(t)$ 和电压 $v_2(t)$ 。

$$V_S(s) = \frac{10}{s} \text{ V}$$

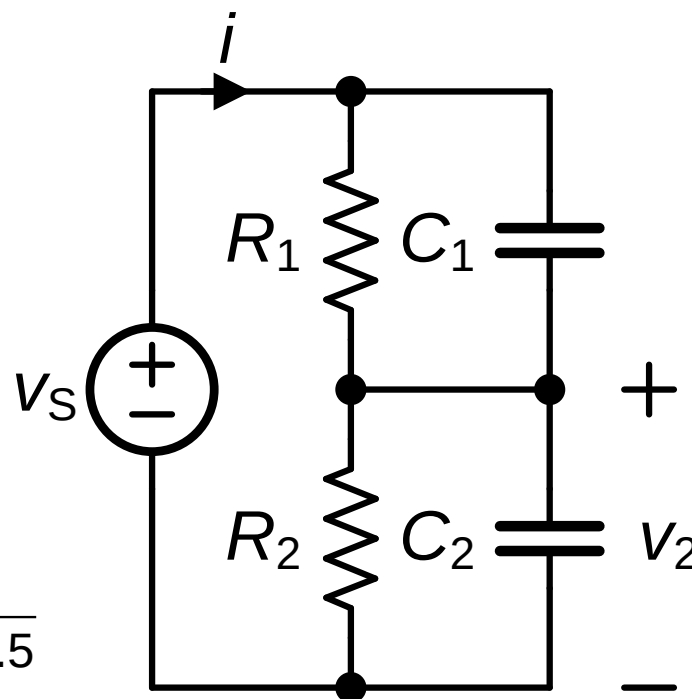
$$I(s) = \frac{V_S(s)}{(R_1 \parallel 1/sC_1) + (R_2 \parallel 1/sC_2)} = \frac{36s^2 + 13s + 1}{4.5s^2 + s}$$

$$= 8 + \frac{5s + 1}{4.5s^2 + s} = 8 + \frac{1}{s} + \frac{1/9}{s + 1/4.5}$$

$$i(t) = 8\delta(t) + (1 + \frac{1}{9}e^{-t/4.5}) \text{ A} \quad (t \geq 0)$$

$$V_2(s) = I(s) \times (R_2 \parallel 1/sC_2) = \frac{9s + 1}{4.5s^2 + s} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s + 1/4.5}$$

$$v_2(t) = (1 + e^{-t/4.5}) \text{ V} \quad (t \geq 0)$$



例题7

如图所示电路， $i_S(t) = \delta(t)$ A， $R = 2 \Omega$ ， $L = 0.5$ H， $C = 0.25$ F，求单位冲激响应 $v_C(t)$ 。

$$I_S(s) = 1 \text{ V}$$

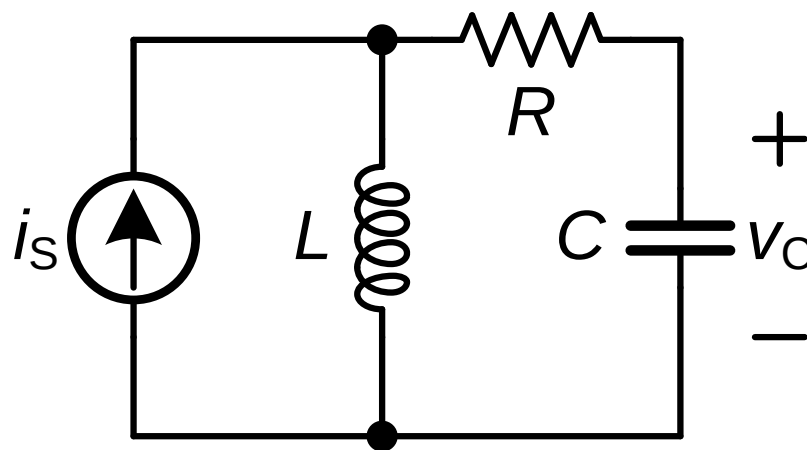
$$V_C(s) = I_S(s) \times [sL \parallel (R + 1/sC)] \times \frac{1/sC}{R + 1/sC}$$

$$= \frac{sL}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{4s}{s^2 + 4s + 8}$$

$$s^2 + 4s + 8 = 0, \quad p_1 = -2 + j2, \quad p_2 = -2 - j2$$

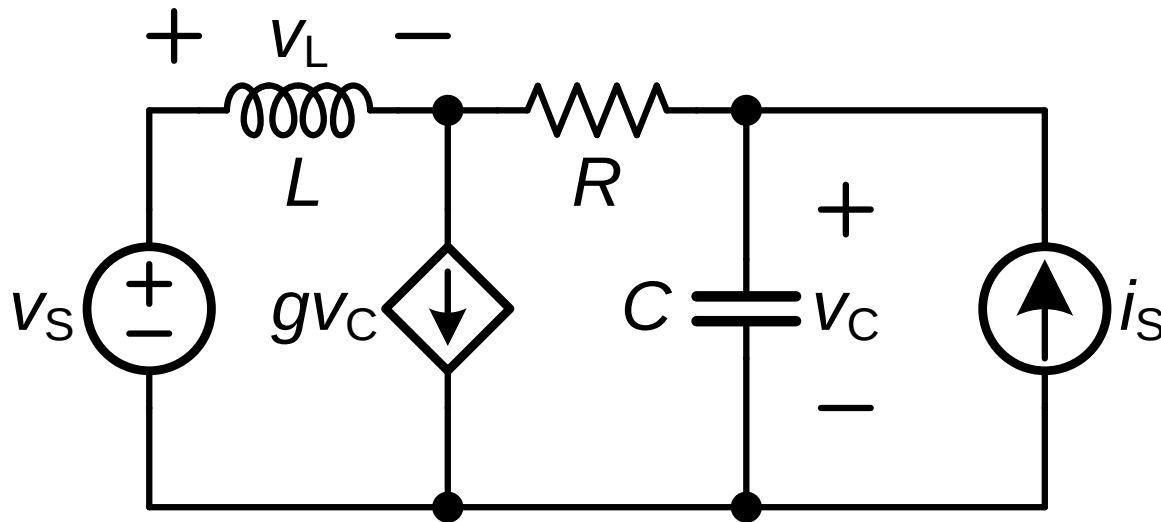
$$V_C(s) = \frac{K_1}{s - (-2 + j2)} + \frac{K_2}{s - (-2 - j2)} \quad K_1 = \frac{4s}{2s + 4} \Big|_{s=-2+j2} = \frac{4(-2 + j2)}{2(-2 + j2) + 4} = 2 + j2 = 2\sqrt{2}e^{j\pi/4}$$

$$v_C(t) = 2|K_1|e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \theta) = 4\sqrt{2}e^{-2t} \cos(2t + \pi/4) \quad (t \geq 0)$$



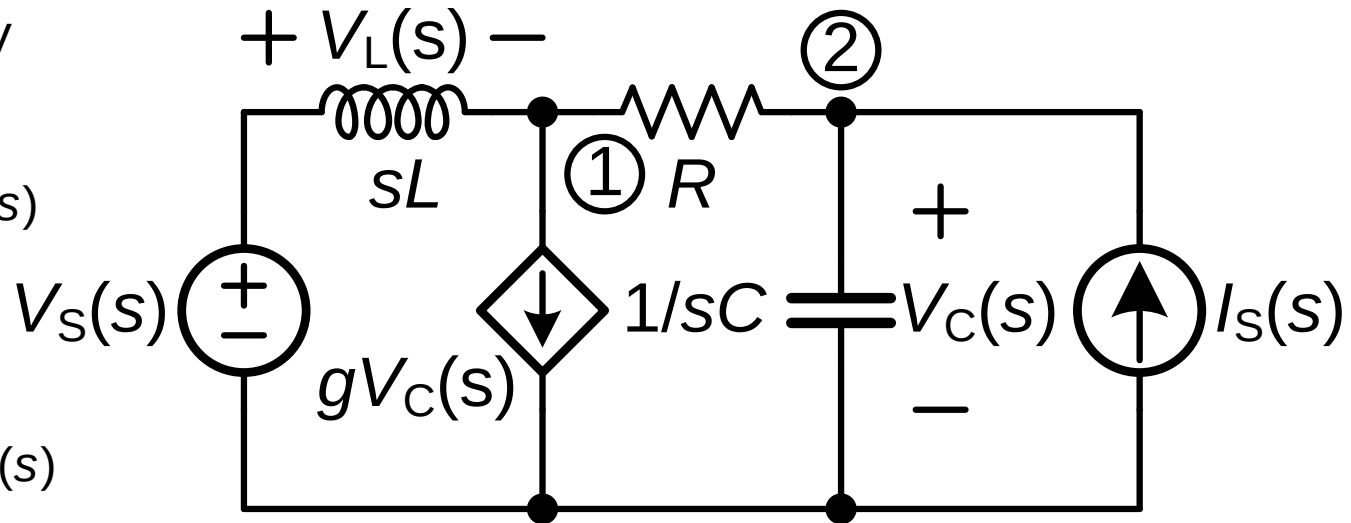
例题8

如图所示电路， $v_S(t) = 6\varepsilon(t)$ V， $i_S(t) = 4\delta(t)$ V， $R = 1\ \Omega$ ， $L = 1$ H， $C = 0.2$ F， $g = 1$ S，求 $t \geq 0$ 时的零状态响应 $v_L(t)$ 和 $v_C(t)$ 。



$$V_S(s) = \frac{6}{s} \text{ V}, \quad I_S(s) = 4 \text{ V}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{sL} + \frac{1}{R} \right) V_{n1}(s) - \frac{1}{R} V_{n2}(s) \\ = \frac{V_S(s)}{sL} - gV_{n2}(s) \\ -\frac{1}{R} V_{n1}(s) + \left(\frac{1}{R} + sC \right) V_{n2}(s) \\ = I_S(s) \end{cases}$$



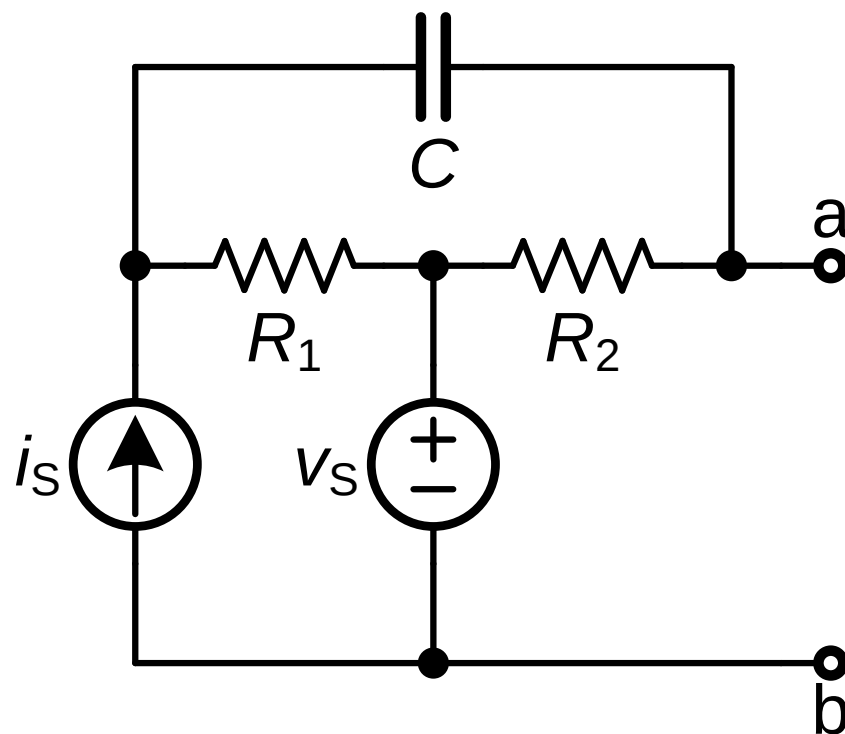
$$\begin{cases} (s+1)V_{n1}(s) = \frac{6}{s} \\ -V_{n1}(s) + (1+0.2s)V_{n2}(s) = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} V_{n1}(s) = \frac{6}{s(s+1)} \\ V_{n2}(s) = \frac{20s^2 + 20s + 30}{s(s+1)(s+5)} \end{cases} \quad \begin{cases} V_L(s) = V_S(s) - V_{n1}(s) = \frac{6}{s+1} \\ V_C(s) = V_{n2}(s) = \frac{6}{s} + \frac{-7.5}{s+1} + \frac{21.5}{s+5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_L(t) = 6e^{-t} \\ v_C(t) = 6 - 7.5e^{-t} + 21.5e^{-5t} \end{cases} \quad (t \geq 0)$$

例题9

如图所示电路， $R_1 = 1 \Omega$ ， $R_2 = 1.5 \Omega$ ，当a和b端接电阻 $R_3 = 3 \Omega$ 时，电阻 R_3 的电流的全响应 $i = (2 + 2e^{-50t})\varepsilon(t) \text{ A}$ 。现将a和b端接零状态电感 $L = 0.25 \text{ H}$ ，求此时的电压 $v_{ab}(t)$ 。

1. 时间常数 $\tau = RC$ 求C值
2. 戴维南等效电路
3. 求等效复电阻 $Z_{EQ}(s)$
3. 求等效开路电压 $V_{OC}(s)$
4. 改变负载后的 $V_{ab}(s)$
5. 拉氏反变换求 $v_{ab}(t)$



$$\tau = R_{\text{EQ}}C = 1/50, \quad R_{\text{EQ}} = R_1 + R_2 \parallel R_3 = 2 \, \Omega, \quad C = 0.01 \, \text{F}$$

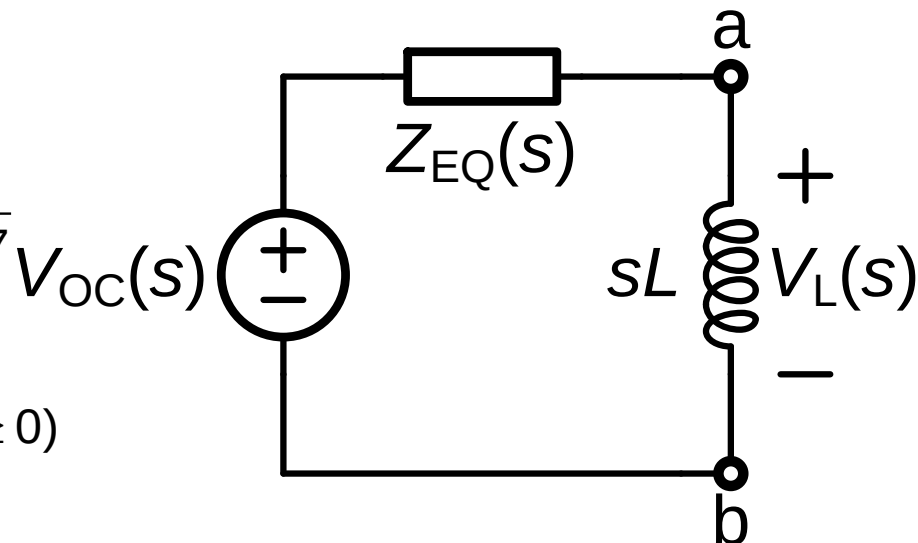
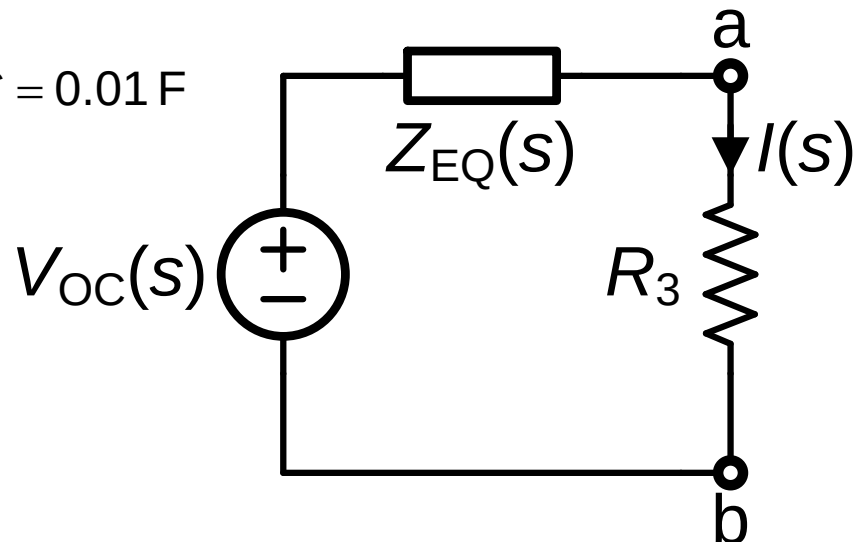
$$Z_{\text{EQ}}(s) = R_2 \parallel (R_1 + 1/sC)$$

$$I(s) = \mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{2}{s} + \frac{2}{s+50} = \frac{4s+100}{s(s+50)}$$

$$V_{\text{OC}}(s) = I(s)[Z_{\text{EQ}}(s) + R_3] = \frac{14.4s+360}{s(s+40)}$$

$$\begin{aligned} V_L(s) &= V_{\text{OC}}(s) \frac{sL}{Z_{\text{EQ}}(s) + sL} \\ &= \frac{14.4s+360}{s^2+42.4s+240} \approx \frac{9.09}{s+6.73} + \frac{5.31}{s+35.67} \end{aligned}$$

$$v_{\text{ab}}(t) = v_L(t) = (9.09e^{-6.73t} + 5.31e^{-35.67t}) \, \text{V} \quad (t \geq 0)$$



复频域网络函数

在单一电源激励下，零状态响应的象函数 $Y(s)$ 与激励源的象函数 $X(s)$ 之比定义为该电路复频域网络函数。

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

网络函数可以是输入(输出)阻抗(导纳)、跨阻抗(导纳)、电压增益或电流增益。

如果激励源是单位脉冲函数 $\delta(t)$ ，其象函数为1，单位冲激响应 $h(t)$ 的象函数就是网络函数 $H(s)$ 。

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}, \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

零状态响应象函数

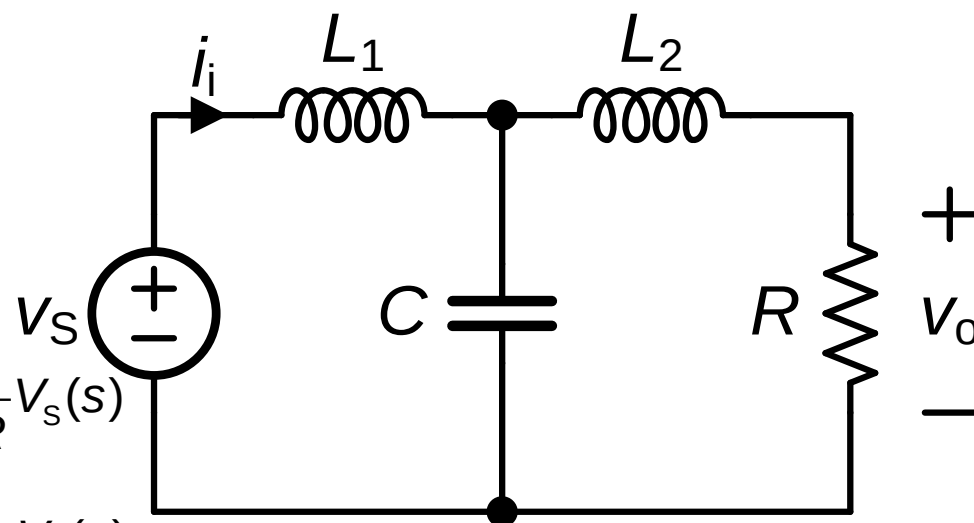
$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{F_1(s)}{F_2(s)}$$

$F_2(s) = 0$ 的根包括 $D(s) = 0$ 和 $Q(s) = 0$ 的根。其中 $Q(s) = 0$ 的根对应外加激励函数的根，响应中属于强制分量； $D(s) = 0$ 的根由网络自身结构和参数决定，响应中属于自由分量。

例题10

如图所示电路为一个低通滤波器， $R = 1 \Omega$ ， $L_1 = 1.5 \text{ H}$ ， $L_2 = 0.5 \text{ H}$ ， $C = 4/3 \text{ F}$ 。求电压增益 $A_V(s) = V_o(s)/V_S(s)$ 和输入导纳 $Y_i(s) = I_i(s)/V_S(s)$ 。

$$\begin{cases} (sL_1 + \frac{1}{sC})I_{m1}(s) - \frac{1}{sC}I_{m2}(s) = V_S(s) \\ -\frac{1}{sC}I_{m1}(s) + (\frac{1}{sC} + sL_2 + R)I_{m2}(s) = 0 \end{cases}$$



$$I_{m1}(s) = \frac{L_2Cs^2 + RCs + 1}{L_1L_2Cs^3 + RL_1Cs^2 + (L_1 + L_2)s + R} V_S(s)$$

$$I_{m2}(s) = \frac{1}{L_1L_2Cs^3 + RL_1Cs^2 + (L_1 + L_2)s + R} V_S(s)$$

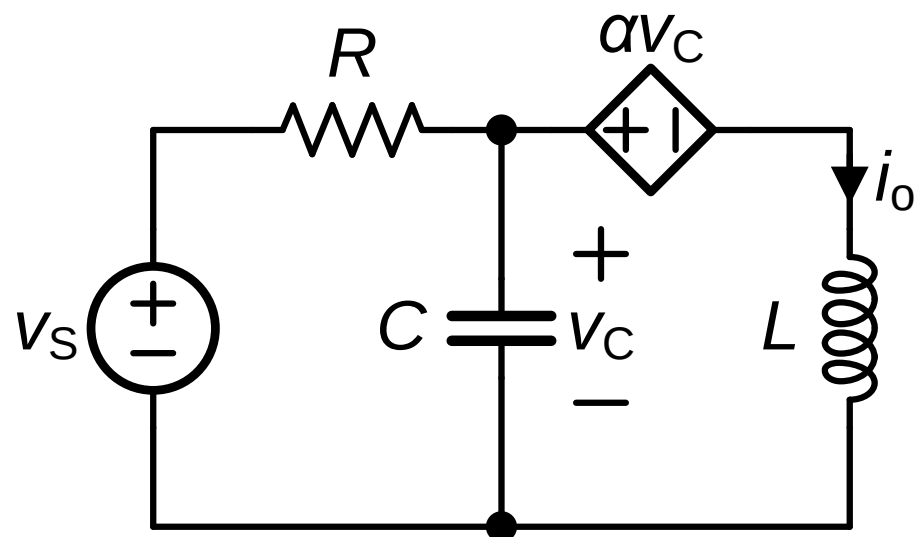
$$A_V(s) = \frac{V_o(s)}{V_S(s)} = \frac{RI_{m2}(s)}{V_S(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

$$Y_i(s) = \frac{I_i(s)}{V_S(s)} = \frac{I_{m1}(s)}{V_S(s)} = \frac{2s^2 + 4s + 3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

例题11

如图所示电路， $R = 0.5 \Omega$ ， $L = 1 \text{ H}$ ， $C = 1 \text{ F}$ ， $\alpha = 0.25$ 。1. 定义跨导 $G(s) = I_o(s)/V_S(s)$ ，求跨导 $G(s)$ 以及单位冲激响应 $g(t)$ 。2. 求 $v_S(t) = 3e^{-t}\varepsilon(t) \text{ V}$ 时的响应 $i_o(t)$ 。

$$\begin{cases} (R + \frac{1}{sC})I_{m1}(s) - \frac{1}{sC}I_{m2}(s) = V_S(s) \\ -\frac{1}{sC}I_{m1}(s) + (\frac{1}{sC} + sL)I_{m2}(s) = -\alpha V_C(s) \\ V_C(s) = \frac{1}{sC}[I_{m1}(s) - I_{m2}(s)] \end{cases}$$



$$I_o(s) = I_{m2}(s) = \frac{1.5V_S(s)}{s^2 + 2s + 0.75}$$

$$G(s) = \frac{I_o(s)}{V_S(s)} = \frac{1.5}{s^2 + 2s + 0.75} = \frac{1.5}{s + 0.5} + \frac{-1.5}{s + 1.5}$$

$$g(t) = 1.5(e^{-0.5t} - e^{-1.5t}) \text{ S} \quad (t \geq 0)$$


$$V_S(s) = \frac{3}{s+1} \text{ V}$$

$$I_o(s) = \frac{1.5V_S(s)}{s^2 + 2s + 0.75} = \frac{1.5}{s^2 + 2s + 0.75} \frac{3}{s+1} = \frac{9}{s+0.5} + \frac{9}{s+1.5} - \frac{18}{s+1}$$

$$i_o(t) = 9(e^{-0.5t} + e^{-1.5t} - 2e^{-t}) \text{ A} \quad (t \geq 0)$$

复频域网络函数的零点和极点

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \\ &= H_0 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_{m-1})(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_{n-1})(s - p_n)} \end{aligned}$$

H_0 为常数。 z_1 、 z_2 、 $\dots$ 、 z_m 是分子多项式 $N(s) = 0$ 的根，称为网络函数的零点。 p_1 、 p_2 、 $\dots$ 、 p_n 是分母多项式 $D(s) = 0$ 的根，称为网络函数的极点。

在复平面或者 s 平面，零点用“○”表示，极点用“×”表示。

网络函数的极点位置

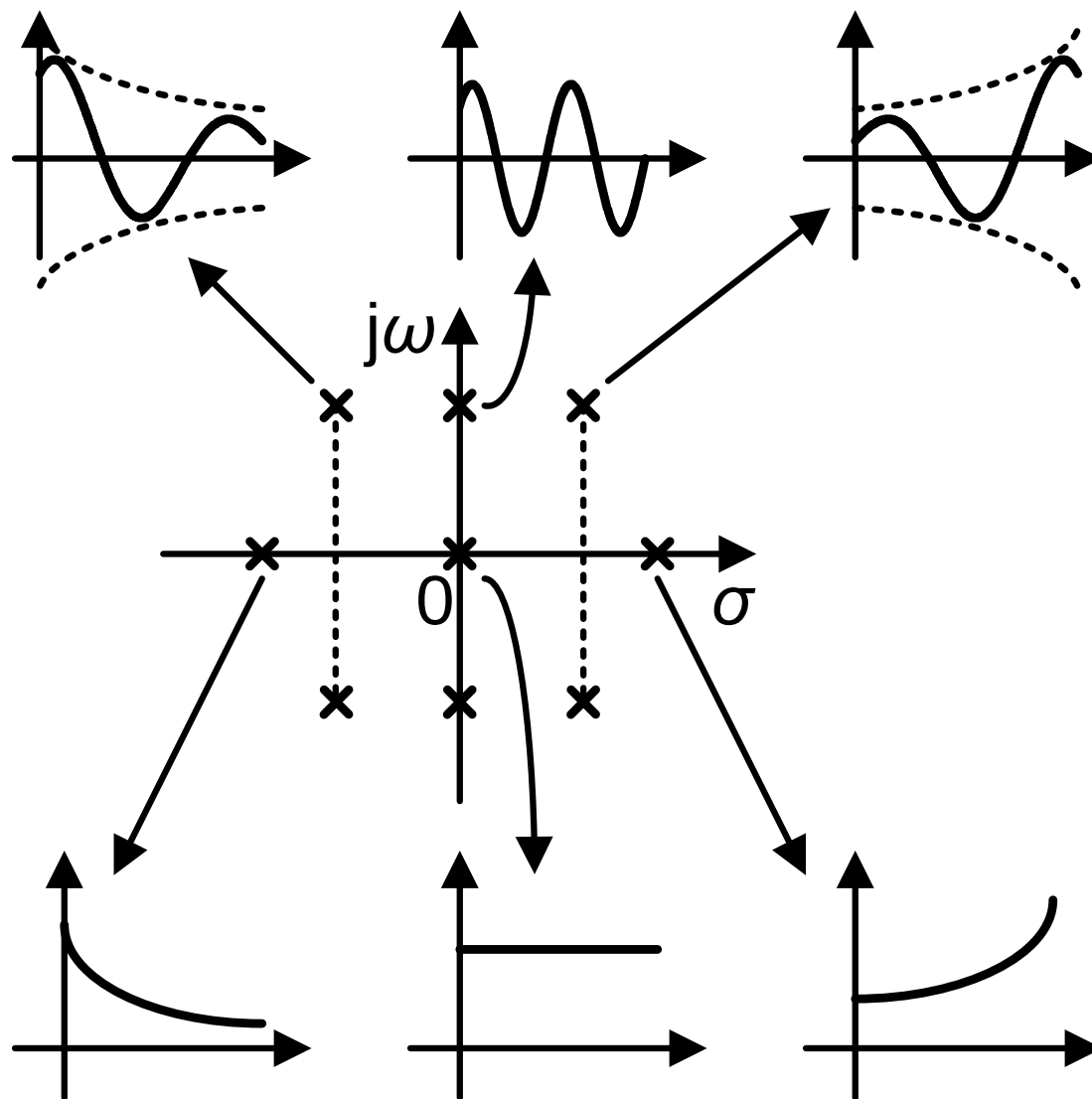
$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i}, \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}$$

$$p_i = \alpha_i + j\omega_i, \quad K_i = |K_i| e^{j\theta_i}$$

1. $p_i = 0$ ，极点位于原点，则 $h_i(t) = K_i \varepsilon(t)$ ，为阶跃函数。
2. $\text{Re}[p_i] = \alpha_i < 0$ ， $\text{Im}[p_i] = \omega_i = 0$ ，极点位于左半实轴上，则 $h_i(t) = K_i e^{\alpha_i t}$ ，指数规律衰减。
3. $\text{Re}[p_i] = \alpha_i > 0$ ， $\text{Im}[p_i] = \omega_i = 0$ ，极点位于右半实轴上，则 $h_i(t) = K_i e^{\alpha_i t}$ ，指数规律增长。

4. $\text{Re}[p_i] = \alpha_i = 0$, $\text{Im}[p_i] = \omega_i \neq 0$, 共轭极点位于虚轴上, 则 $h_i(t) = 2|K_i| \cos(\omega_i t + \theta_i)$, 不衰减的自由振荡。
5. $\text{Re}[p_i] = \alpha_i < 0$, $\text{Im}[p_i] = \omega_i \neq 0$, 共轭极点位于左半平面但不包括实轴, 则 $h_i(t) = 2|K_i| e^{\alpha_i t} \cos(\omega_i t + \theta_i)$ 振幅按指数衰减的自由振荡。
6. $\text{Re}[p_i] = \alpha_i > 0$, $\text{Im}[p_i] = \omega_i \neq 0$, 共轭极点位于右半平面但不包括实轴, 则 $h_i(t) = 2|K_i| e^{\alpha_i t} \cos(\omega_i t + \theta_i)$ 振幅按指数增长的自由振荡。

极点与单位冲激响应的关系



复频域网络函数与相量域网络函数

$$H(s) \begin{matrix} \xrightarrow{s=j\omega} \\ \xleftarrow{j\omega=s} \end{matrix} H(j\omega)$$

例题12

如图所示二端口网络为线性无独立源网络。

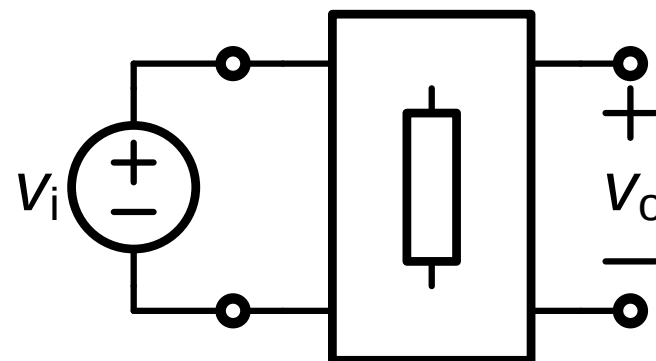
1. 已知 $v_i = \delta(t)$ 时，零状态响应 $v_o = \delta(t) + (e^{-t} - 4e^{-2t})\varepsilon(t)$ V。求当 $v_i = 3\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)$ V 时的电压 v_o 。

2. 已知 $H(j\omega) = \frac{\dot{V}_o}{\dot{V}_i} = \frac{j\omega}{-\omega^2 + j5\omega + 6}$ ，求单位冲激函数 $h(t)$ 。

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1 + \frac{1}{s+1} - \frac{4}{s+2}}{1} = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 2}$$

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{-\omega^2}{-\omega^2 + j3\omega + 2}$$

$$\dot{V}_o = H(j\sqrt{2}) \times \dot{V}_i = \frac{-(\sqrt{2})^2}{-(\sqrt{2})^2 + j3\sqrt{2} + 2} \times 3 = j\sqrt{2} \text{ V} \quad v_o = 2\cos(\sqrt{2}t + \frac{\pi}{2}) \text{ V}$$




$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{-\omega^2 + j5\omega + 6} = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + j5\omega + 6}$$

$$H(s) = H(j\omega)\big|_{j\omega=s} = \frac{s}{s^2 + js + 6} = \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3}$$

$$h(t) = (-2e^{-2t} + 3e^{-3t})\varepsilon(t)$$