电路基础
(Fundamentals of Electric Circuits, INF0120002.07)

2019年05月07日

唐长文 教授

zwtang@fudan.edu.cn

http://rfic.fudan.edu.cn/Courses.htm

复旦大学/微电子学院/射频集成电路设计研究小组

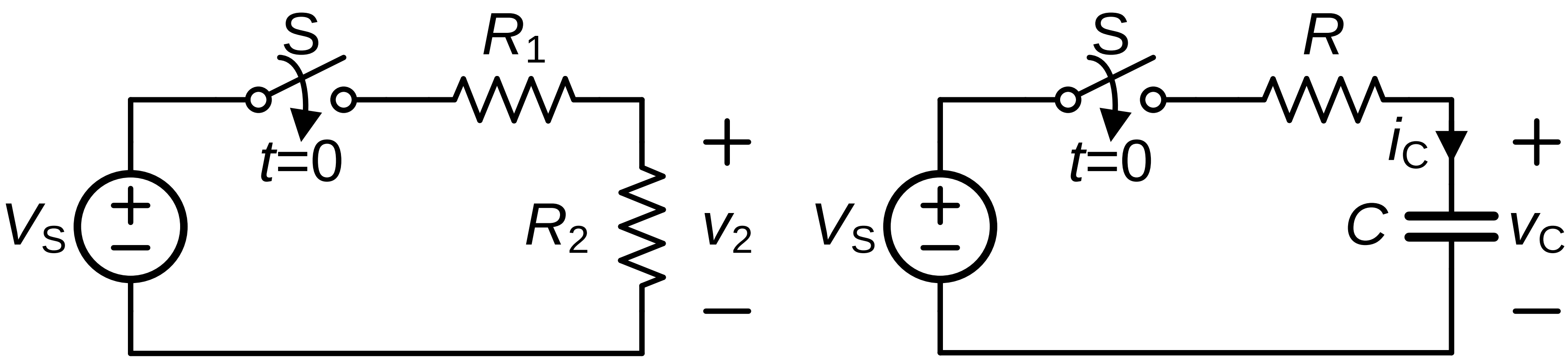
第八章 线性动态电路的时域分析

- 动态电路的初始值
- 一阶电路的零输入响应
- 一阶电路的零状态响应
- 一阶电路的全响应
- 一阶电路的三要素法
- 二阶电路的零输入响应
- 二阶电路的零状态响应和全响应

- 阶跃响应
- 冲激响应
- 卷积积分
- 状态变量分析法

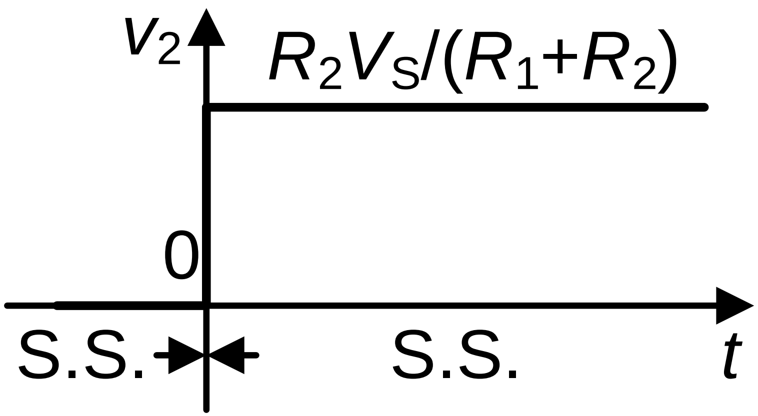
动态电路的初始值

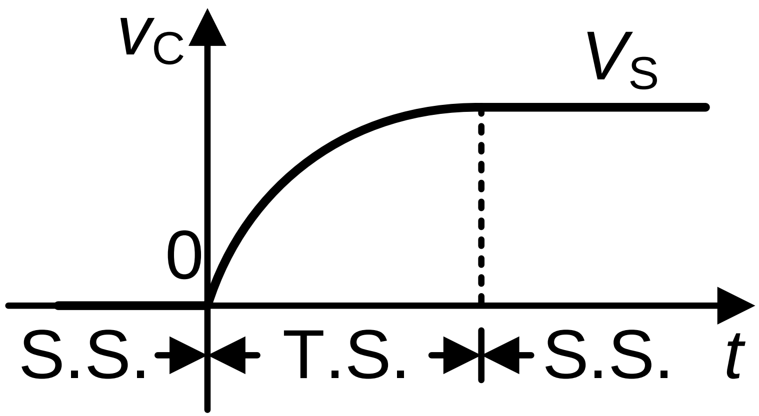
- 动态元件：电容元件和电感元件
- 电阻电路与动态电路



电路结构或者参数变化引起的电路变化称为换路。

稳态和暂态





S.S. Steady State
T.S. Transient state

S.S. Steady State
T.S. Transient state

动态电路换路后的KVL方程：

$$Ri_C(t)+v_C(t)=V_S,\quad i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t},\quad RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}+v_C(t)=V_S$$

常系数线性一阶微分方程

初始值

一阶微分方程求解需要一个初始条件，即待求变量在换路后瞬间的初始值。

$t = 0$时发生换路，用$t = 0_-$和$t = 0_+$分别表示换路前和换路后瞬间，用$v(0_-)$、$i(0_-)$、$q(0_-)$和$\varphi(0_-)$表示换路之前的稳定值，用$v(0_+)$、$i(0_+)$、$q(0_+)$和$\varphi(0_+)$表示换路之后的初始值。

换路之后，电路量将从初始值开始变动。

经典时域分析法

根据KCL、KVL和支路的VCR列出以时间为自变量的n阶线性常微分方程，确定待求电路量的0阶至$(n-1)$阶在$t = 0_+$时的初始值，然后求解常微分方程得到待求电路量。这种方法称为经典时间域分析法。

电容电压的初始值

在$t = 0$时刻，线性电容的电荷、电压和电流的关系为

$$q(0_+) = q(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i_C(t)\mathrm{d}t,\ \ v_C(0_+) = v_C(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C(t)\mathrm{d}t$$

如果$i_C(t)$是有限值，

$$\int_{0_-}^{0_+} i_C(t)\mathrm{d}t = 0$$

则电容上的电荷和电压就不发生跃变，

$$q(0_+) = q(0_-),\ \ v_C(0_+) = v_C(0_-)$$

电感电流的初始值

在$t=0$时刻，线性电感的磁通链、电流和电压的关系为

$$\varphi(0_+)=\varphi(0_-)+\int_{0_-}^{0_+} v_{\rm L}(t)\,{\rm d}t,\ \ i_{\rm L}(0_+)=i_{\rm L}(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} v_{\rm L}(t)\,{\rm d}t$$

如果$v_{\rm L}(t)$是有限值，

$$\int_{0_-}^{0_+} v_{\rm L}(t)\,{\rm d}t=0$$

则电感上的磁通链和电流就不发生跃变，

$$\varphi(0_+)=\varphi(0_-),\ \ i_{\rm L}(0_+)=i_{\rm L}(0_-)$$

换路定则

在换路前后电容的电流和电感的电压为有限值的条件下，换路前后的电容的电压和电感的电流不能跃变，这种规律称为换路定则。

确定初始值的步骤

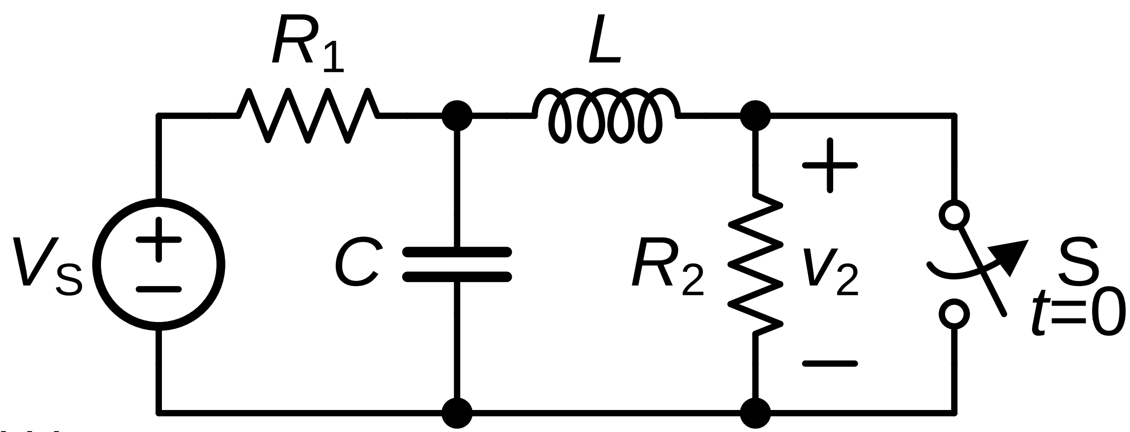
1. 根据换路前的电路，确定$v_C(0_-)$和$i_L(0_-)$；
2. 根据换路定则确定$v_C(0_+)$和$i_L(0_+)$；
3. 画出$t = 0$时的初始值等效电路，确定其它电路量的初始值。根据置换定理，电容用$v_C(0_+)$的电压源替换，电感用$i_L(0_+)$的电流源替换。

例题1

如图所示电路，$V_S = 12$ V，$R_1 = 4\ \Omega$，$R_2 = 8\ \Omega$。在$t < 0$时处于稳定，$t = 0$时开关断开。求初始值$v_C(0_+)$，$v_L(0_+)$，$i_C(0_+)$，$i_L(0_+)$和$v_2(0_+)$。

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{V_S}{R_1} = 3\ \text{A}$$

$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = 0\ \text{V}$$



$$v_2(0_+) = R_2 i_L(0_+) = 24\ \text{V}$$

$$v_L(0_+) = v_C(0_+) - v_2(0_+) = -24\ \text{V}$$

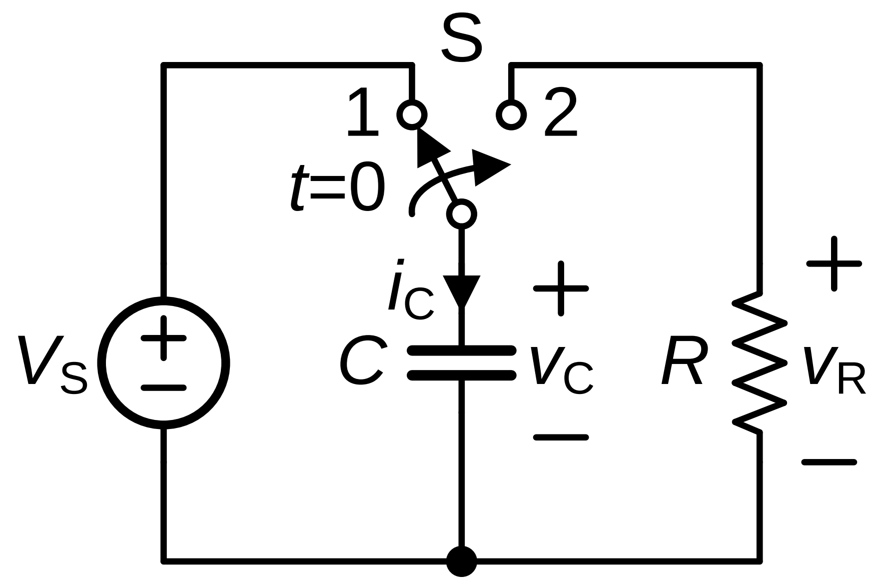
$$i_C(0_+) = \frac{V_S - v_C(0_+)}{R_1} - i_L(0_+) = 0\ \text{A}$$

一阶电路的零输入响应

可用一阶常微分方程描述的电路称为一阶电路。电路中除电阻之外，只含有一个电容或者一个电感，或者经变换可以等效为一个电容或者一个电感。例如：一阶*RC*电路，一阶*RL*电路。

在换路后无独立电源的一阶电路中，仅由动态元件初始值所产生的响应称为一阶电路的零输入响应。

RC电路的零输入响应



$t<0$时，$v_C=V_S$。

$t=0$时，开关从1节点切换到2节点。

$t>0$时，电容C通过电阻R放电。

电路的一阶常微分方程：

$$v_C(t)-v_R(t)=v_C(t)+Ri_C(t)=RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}+v_C(t)=0$$

初始值：$v_C(0_+)=v_C(0_-)=V_S$

一阶常微分方程的求解

通解： $v_C(t)=Ae^{pt}$

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=(RCp+1)Ae^{pt}=0$$

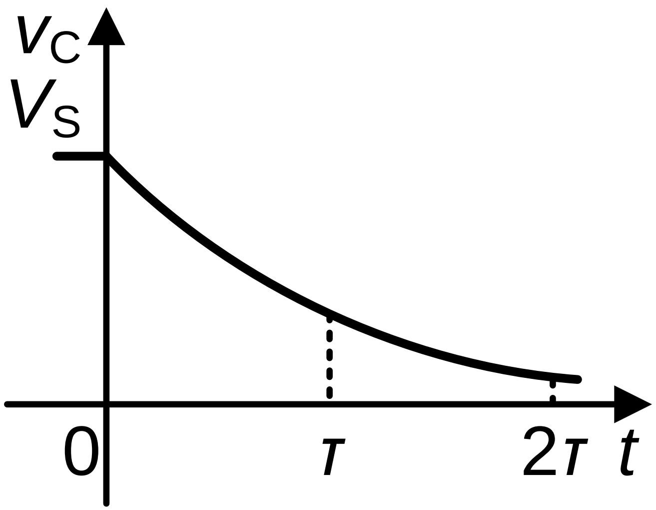
特征方程： $RCp+1=0$

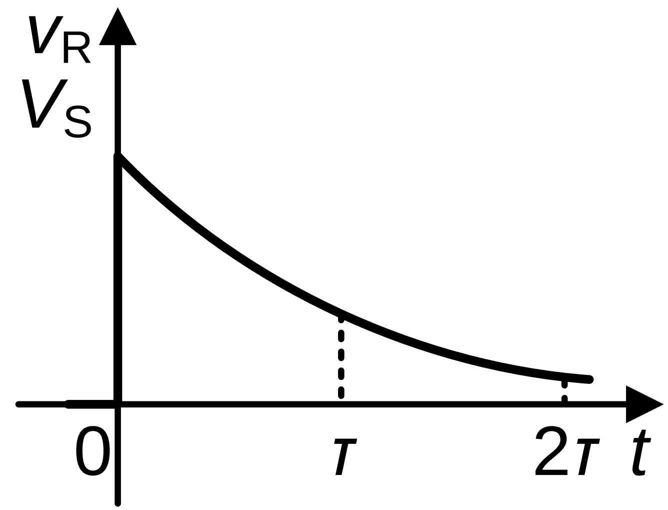
特征根： $p=-\frac{1}{RC}$

根据初始值， $v_C(0_+)=Ae^{-\frac{1}{RC}\times 0}=A=V_S$

$$v_C(t)=V_S e^{-\frac{1}{RC}t}，\quad i_C(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}=-\frac{V_S}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

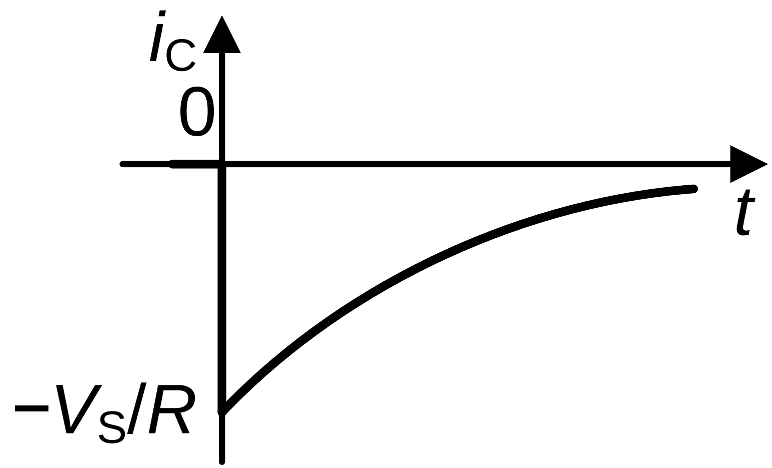
电压和电流随时间变化的曲线



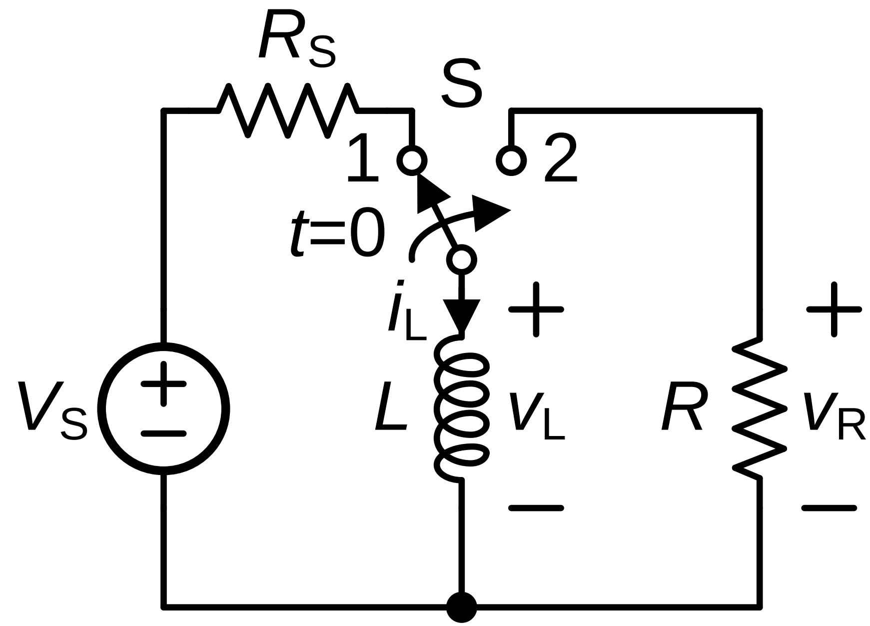


时间常数$\tau = RC$

$$v_C(t_0+\tau) = e^{-1}v_C(t_0)$$
$$\approx 0.368 v_C(t_0)$$



RL电路的零输入响应



$t < 0$时，$i_L = V_S/R_S$。

$t = 0$时，开关从1节点切换到2节点。

$t > 0$时，电感L通过电阻R放电。

电路的一阶常微分方程：

$$v_L(t) - v_R(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + Ri_L(t) = 0,\quad \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + i_L(t) = 0$$

初始值：$i_L(0_+) = i_L(0_-) = V_S/R_S$

一阶常微分方程的求解

通解：$i_{\mathrm{L}}(t)=Ae^{pt}$

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(t)}{\mathrm{d}t}+i_{\mathrm{L}}(t)=(\frac{L}{R}p+1)Ae^{pt}=0$$

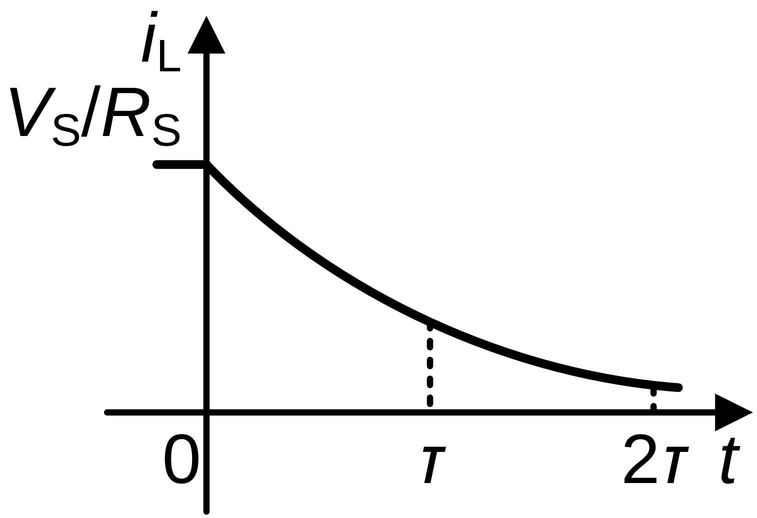
特征方程：$\frac{L}{R}p+1=0$

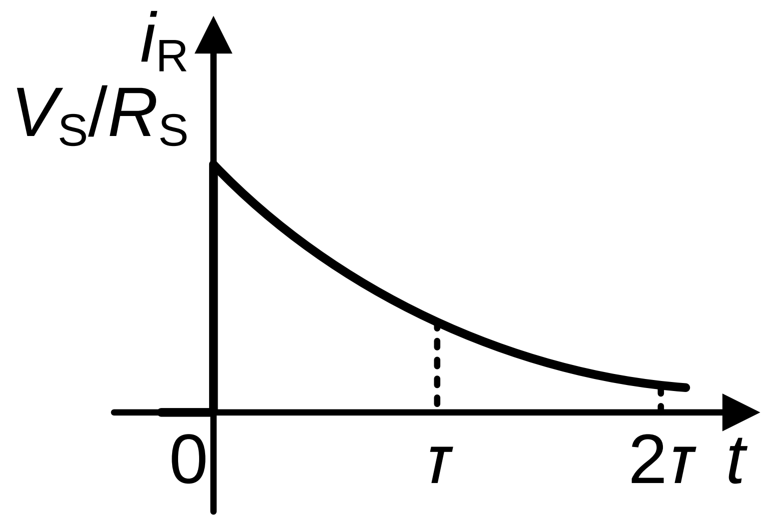
特征根：$p=-\frac{R}{L}$

根据初始值，$i_{\mathrm{L}}(0_{+})=Ae^{-\frac{R}{L}\times 0}=A=V_{\mathrm{S}}/R_{\mathrm{S}}$

$$i_{\mathrm{L}}(t)=\frac{V_{\mathrm{S}}}{R_{S}}e^{-\frac{R}{L}t},\quad v_{L}(t)=L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(t)}{\mathrm{d}t}=-R\frac{V_{\mathrm{S}}}{R_{S}}e^{-\frac{R}{L}t}$$

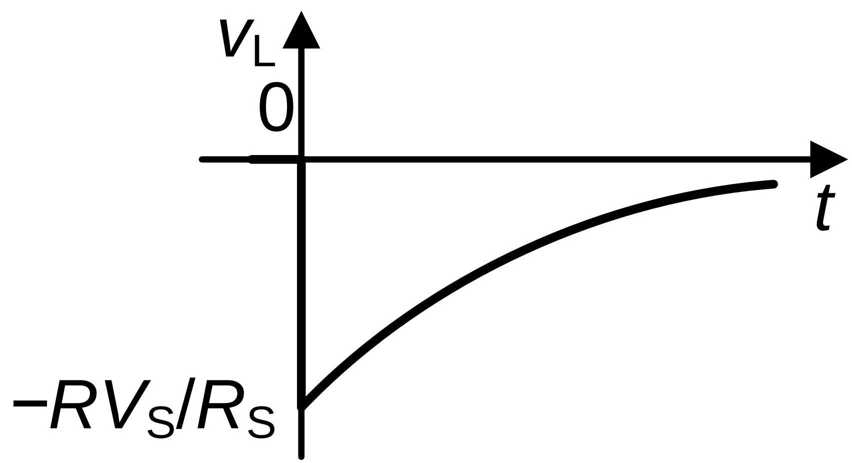
电压和电流随时间变化的曲线





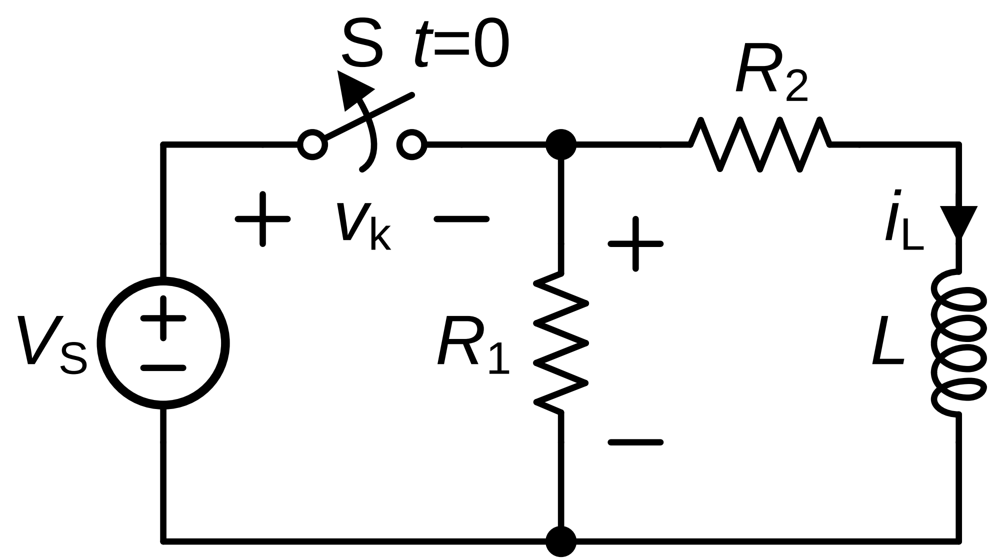
时间常数$\tau = L/R$

$$i_{\mathrm{L}}(t_0+\tau) = \mathrm{e}^{-1} i_{\mathrm{L}}(t_0)$$
$$\approx 0.368\, i_{\mathrm{L}}(t_0)$$



例题2

如图所示电路，$V_S = 35$ V，$R_1 = 5\text{k}\ \Omega$，$R_2 = 5\ \Omega$，$L = 1$ H。$t < 0$时电路处于直流稳态。$t = 0$时开关断开，求$t > 0$时的电感电流$i_L(t)$和开关两端电压$v_K(t)$。



$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{V_S}{R_2} = 7\ \text{A}$$

$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{1\ \text{H}}{5\text{k}\ \Omega + 5\ \Omega} \approx 2\times 10^{-4}\ \text{S}$$

$$i_L(t) = i_L(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = 7 e^{-5\times 10^3 t}\ \text{A}\ \ (t \geq 0)$$

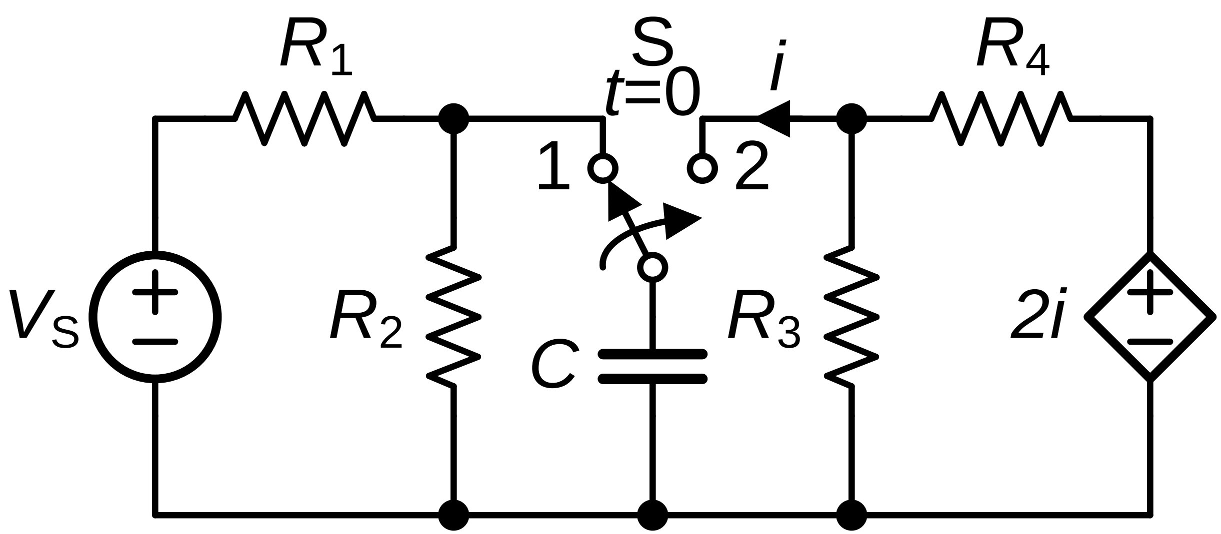
$$v_K(t) = V_S - v_1(t) = V_S + R_1 i_L(t)$$

$$= (35 + 35\times 10^3 e^{-5\times 10^3 t})\ \text{V}\ \ (t \geq 0)$$

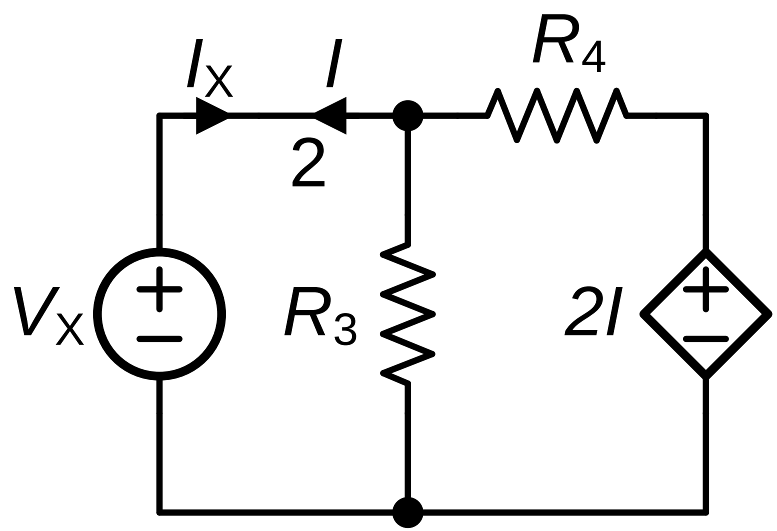
$$v_K(0_+) = (35 + 35\times 10^3 e^{-5\times 10^3 \times 0})\ \text{V} \approx 35\text{k V}$$

例题3

如图所示电路，$V_S = 10$ V，$R_1 = 4\ \Omega$，$R_2 = 6\ \Omega$，$R_3 = 2\ \Omega$，$R_4 = 6\ \Omega$， $C = 1$ F，$t < 0$时开关S合在位置1时电路已达到稳态，$t = 0$时开关S由位置1合向位置2，求$t \geq 0$时的电流$i(t)$。



$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = V_S \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 6\ \mathrm{V}$$

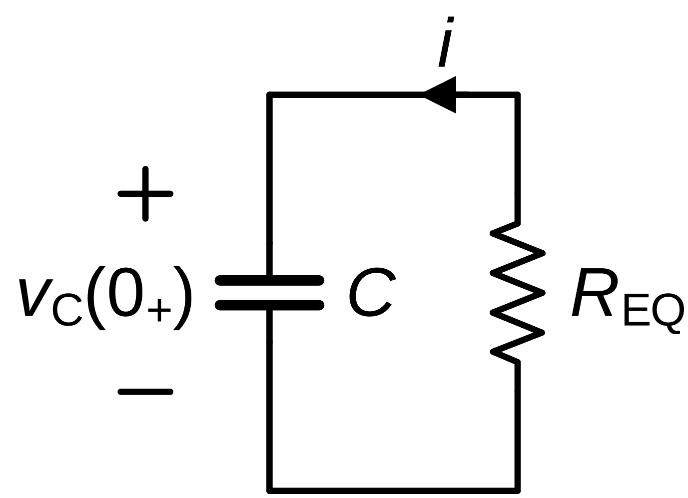


$$I_X = \frac{V_X}{R_3} + \frac{V_X + 2I_X}{R_4}$$

$$R_{EQ} = \frac{V_X}{I_X} = \frac{R_3(R_4 - 2)}{R_3 + R_4} = 1\,\Omega$$

$$\tau = R_{EQ}C = 1\,\mathrm{s}$$

$$v_C(t) = v_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 6\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{V},\ \ (t \geq 0)$$



$$i(\mathrm{t}) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} = -6\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{A},\ \ (t > 0)$$

一阶电路的零状态响应

一阶电路的零状态响应就是电路在零初始状态下(动态元件初始值为零)由外加激励引起的响应。

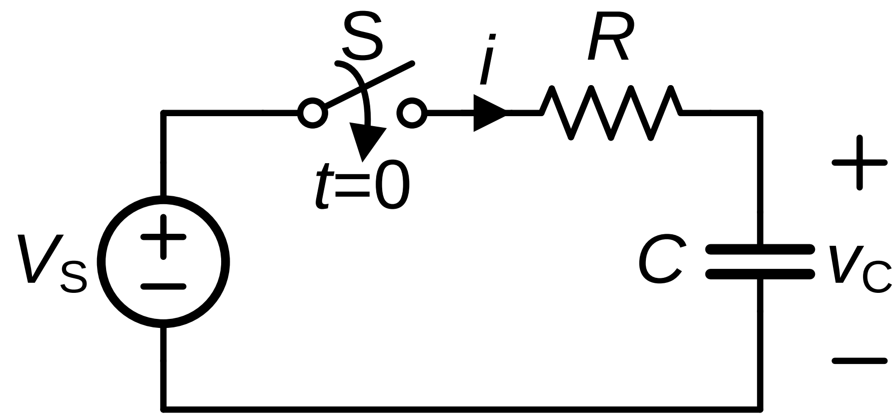
外加激励源类型包括：直流电源和正弦交流电源，阶跃电源，冲激电源，等等。

直流电源激励下RC电路零状态响应

$t<0$时，开关S断开，$v_C(0_-)=0$。

$t=0$时，开关S闭合。

$t>0$时，电源V_S通过电阻R对电容C充电。



电路的一阶常微分方程：

$$v_R(t)+v_C(t)=V_S,\quad Ri_C(t)+v_C(t)=V_S,\quad RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}+v_C(t)=V_S$$

初始值：$v_C(0_+)=v_C(0_-)=0$

一阶非齐次常微分方程的求解

方程的解由非齐次方程的特解和对应的齐次方程的通解两个分量组成：

$$v_C(t) = v_C^{'}(t) + v_C^{''}(t)$$

特解：

$$v_C^{'}(t) = V_S$$

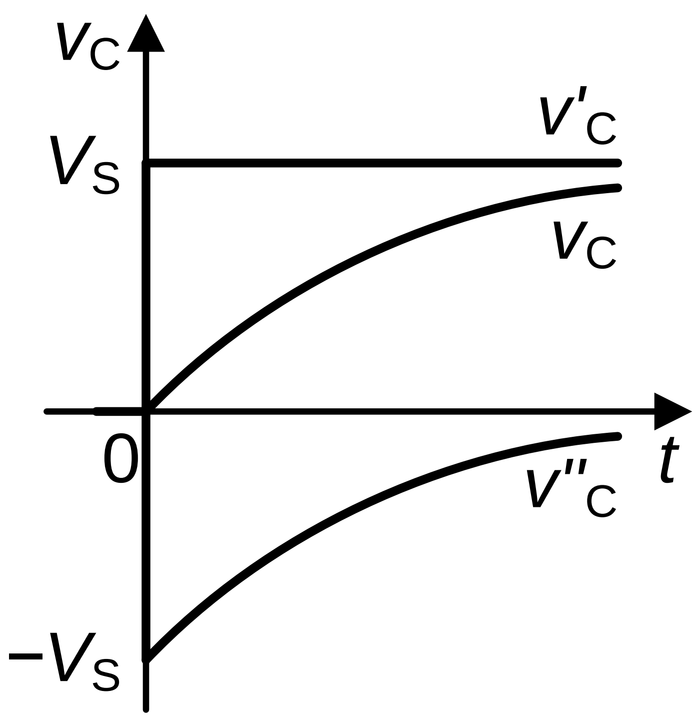
齐次方程 $RC\dfrac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0$ 的通解：$v_C^{''}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

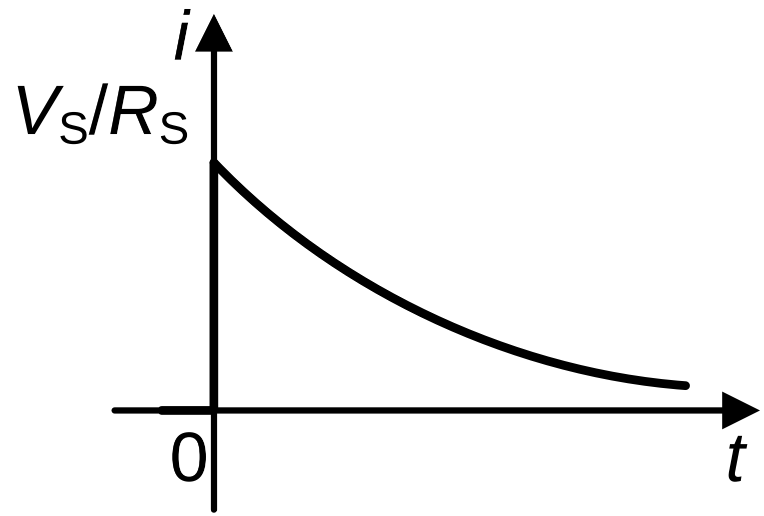
$$\tau = RC$$

根据初始值，$v_C(0_+) = v_C(0_-) = 0$，$A = -V_S$

$$v_C(t) = V_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}),\ \ i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{V_S}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电压和电流随时间变化的曲线

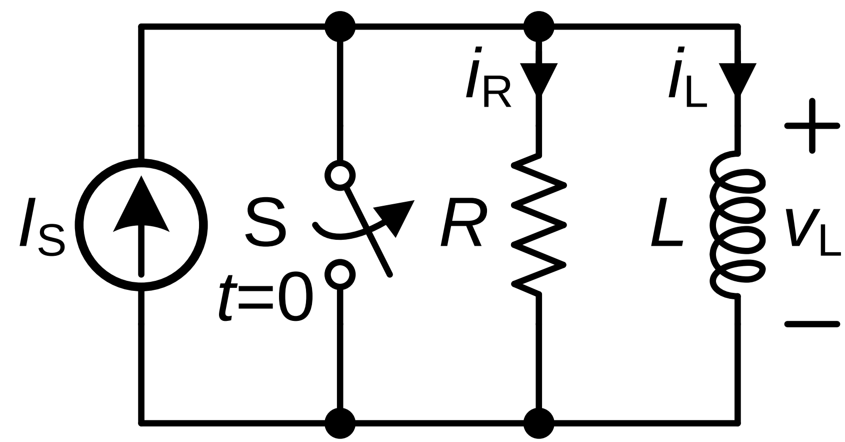




时间常数$\tau = RC$

直流电源激励下*RL*电路零状态响应

$t<0$时，开关S闭合，
$i_L(0_-)=0$。
$t=0$时，开关S打开。
$t>0$时，电源I_S对电感L充电。



电路的一阶常微分方程：

$$i_R(t)+i_L(t)=I_S,\quad \frac{v_L(t)}{R}+i_L(t)=I_S,\quad \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+i_L(t)=I_S$$

初始值：$i_L(0_+)=i_L(0_-)=0$

一阶非齐次常微分方程的求解

方程的解由非齐次方程的特解和对应的齐次方程的通解两个分量组成：

$$i_L(t)=i_L^{'}(t)+i_L^{''}(t)$$

特解：

$$i_L^{'}(t)=I_S$$

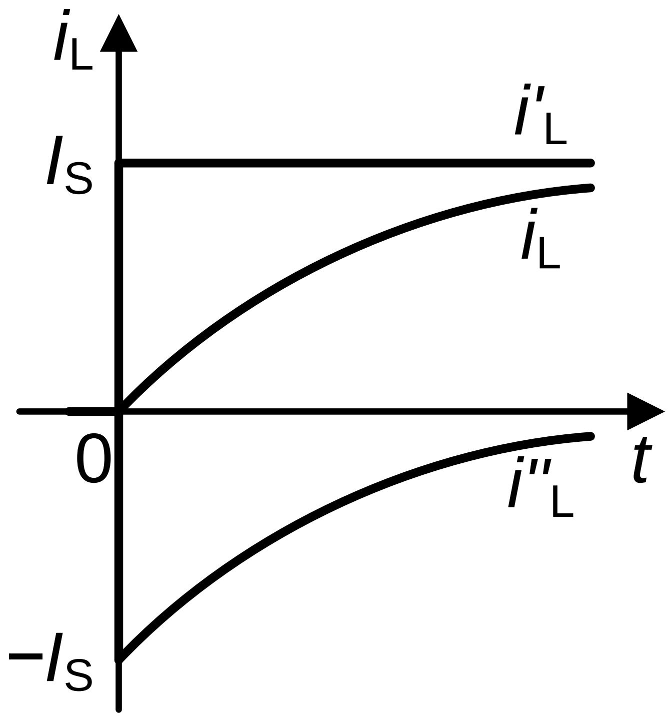
齐次方程 $\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+i_L(t)=0$ 的通解： $i_L^{''}(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

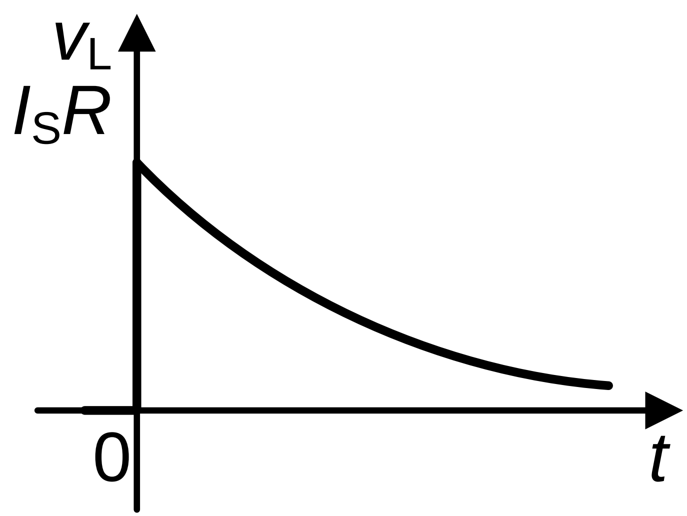
$$\tau=\frac{L}{R}$$

根据初始值， $i_L(0_+)=i_L(0_-)=0,\ A=-I_S$

$$i_L(t)=I_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}}),\quad v_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_C(t)}{\mathrm{d}t}=RI_Se^{-\frac{t}{\tau}}$$

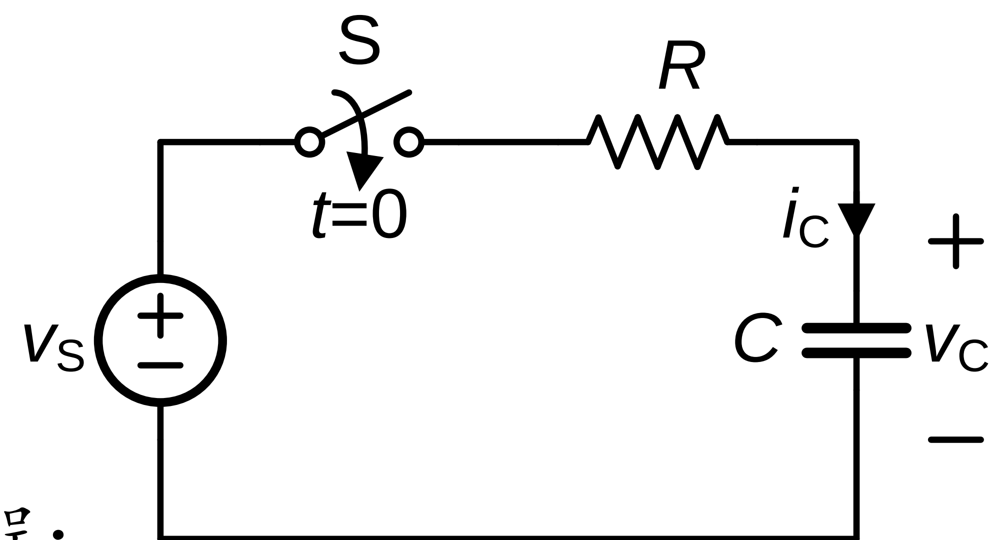
电压和电流随时间变化的曲线





时间常数$\tau = L/R$

正弦电源激励下RL电路零状态响应



v_S为正弦电压源

$v_S = V_{Sm}\cos(\omega t + \varphi_0)$

其中φ_0时接入相位角

$t \geq 0$时，开关S接通，

电路的一阶常微分方程：

$$v_R(t) + v_C(t) = V_{Sm}\cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = V_{Sm}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

初始值： $v_C(0_+) = v_C(0_-) = 0$

一阶非齐次常微分方程的求解

方程的解由非齐次方程的特解和对应的齐次方程的通解两个分量组成：

$$v_C(t) = v_C^{'}(t) + v_C^{''}(t)$$

特解：
$$v_C^{'}(t) = V_{Cm}\cos(\omega t + \varphi_i)$$

正弦交流电路相量分析法

$$\dot{V}_C = \dot{V}_S \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \dot{V}_S \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$V_{Cm} = \frac{V_{Sm}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad \varphi_i = \varphi_0 - \arctan(\omega RC)$$

齐次方程 $RC\dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t}+v_{\mathrm{C}}(t)=0$ 的通解： $v_{\mathrm{C}}''(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

$$\tau = RC$$

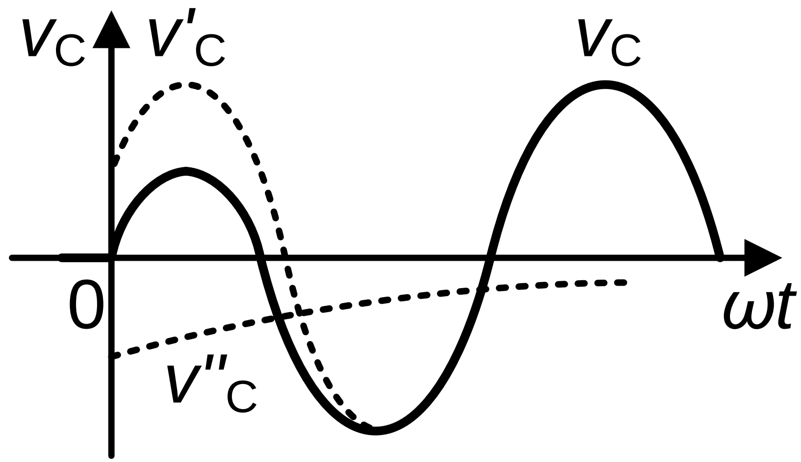
根据初始值， $v_{\mathrm{C}}(0_{+})=v_{\mathrm{C}}(0_{-})=0$

$$v_{\mathrm{C}}(\mathrm{t})=V_{\mathrm{Cm}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v_{\mathrm{C}}(0_{+})=V_{\mathrm{Cm}}\cos(\varphi_{\mathrm{i}})+Ae^{-\frac{0}{\tau}}=0,\ \ A=-V_{\mathrm{Cm}}\cos(\varphi_{\mathrm{i}})$$

$$v_{\mathrm{C}}(\mathrm{t})=V_{\mathrm{Cm}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})-V_{\mathrm{Cm}}\cos(\varphi_{\mathrm{i}})e^{-\frac{t}{\tau}},\ \ (t\geq 0)$$

电压随时间变化的曲线

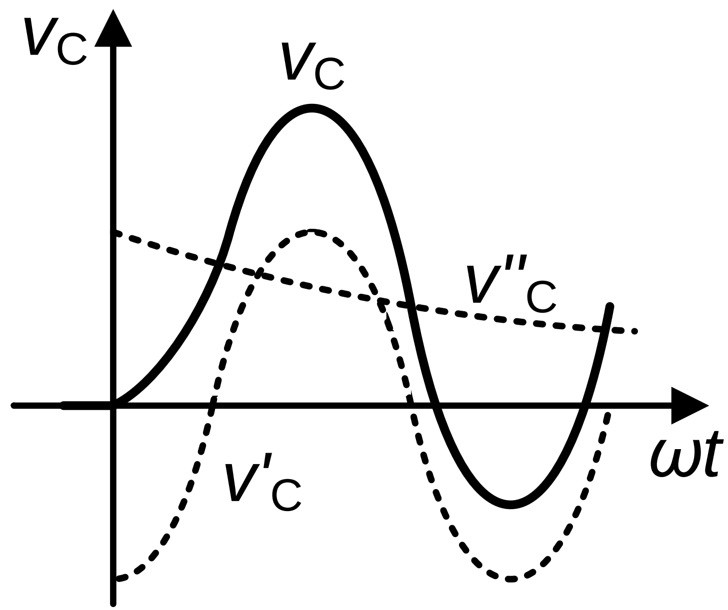


1. 如果开关接通时，φ_0满足

$$\varphi_i = \varphi_0 - \arctan(\omega RC) = \pm \pi/2$$

$$v''_C(t) = -V_{Cm}\cos(\varphi_i)e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

暂态分量为零，立即进入正弦稳态。



2. 如果开关接通时，φ_0满足

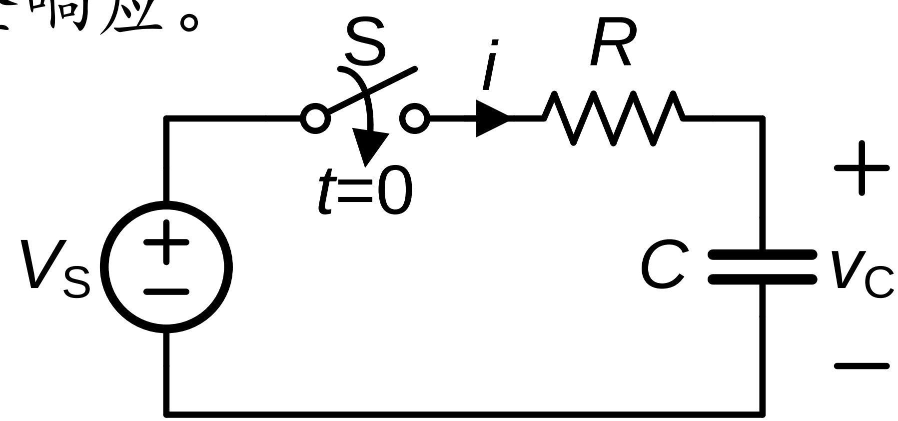
$$\varphi_i = \varphi_0 - \arctan(\omega RC) = 0 \text{ or } \pi$$

$$v_C(t) = \pm V_{Cm}\left(\cos(\omega t) - e^{-\frac{t}{\tau}}\right),\ (t \geq 0)$$

$v_C(t)$的绝对值的最大值近似为$2V_{Cm}$

一阶电路的全响应

一阶电路在非零初始状态下，由外加激励引起的响应称为一阶电路的全响应。



$t < 0$时，开关S断开，

$v_C(0_-) = V_0$。

$t = 0$时，开关S闭合。

$t > 0$时，电源V_S通过电阻R对电容C充电。

电路的一阶常微分方程：

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = V_S$$

初始值： $v_C(0_+) = v_C(0_-) = V_0$

一阶非齐次常微分方程的求解

方程的解由非齐次方程的特解和对应的齐次方程的通解两个分量组成：

$$v_C(t) = v_C^{'}(t) + v_C^{''}(t)$$

特解：

$$v_C^{'}(t) = V_S$$

齐次方程 $RC\dfrac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0$ 的通解：$v_C^{''}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

$$\tau = RC$$

根据初始值，$v_C(0_+) = v_C(0_-) = V_0$，$A = V_0 - V_S$

$$v_C(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v_C(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

1. 全响应 = (零输入响应) + (零状态响应)

$$V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad\qquad V_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

2. 全响应 = (强制分量) + (自由分量)

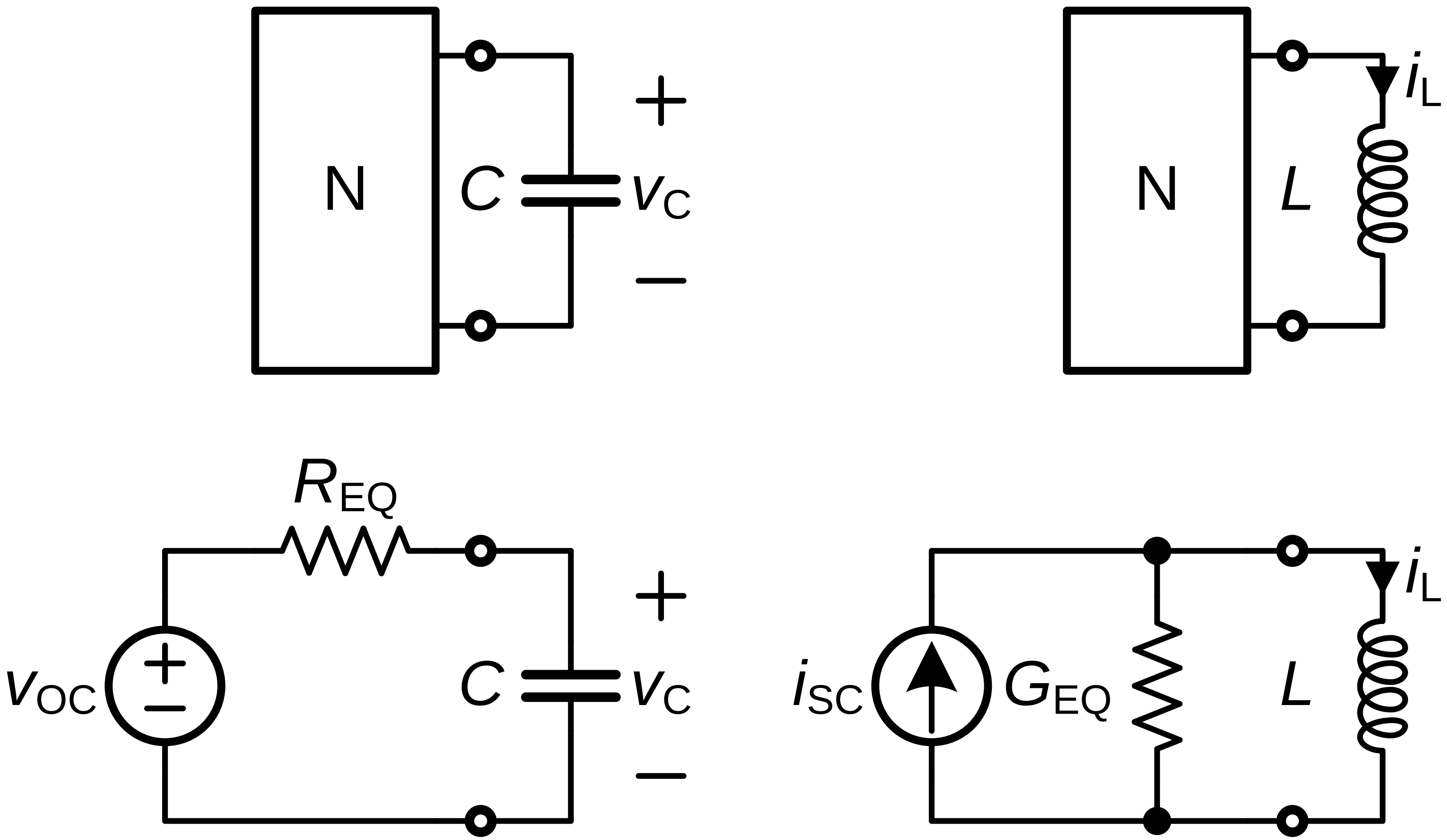
$$V_S \qquad\qquad (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

3. 全响应 = (稳态分量) + (暂态分量)

$$V_S \qquad\qquad (V_0 - V_S)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

一阶电路的三要素法

一阶*RC*/*RL*电路的戴维南/诺顿等效电路。



$$\begin{cases} R_{\mathrm{EQ}}C\dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t}+v_{\mathrm{C}}(t)=v_{\mathrm{OC}}(t) \\ v_{\mathrm{C}}(0_+)=V_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} G_{\mathrm{EQ}}L\dfrac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(t)}{\mathrm{d}t}+i_{\mathrm{L}}(t)=i_{\mathrm{SC}}(t) \\ i_{\mathrm{L}}(0_+)=I_0 \end{cases}$$

$f(t)$表示待求量$v_{\mathrm{C}}(t)$或者$i_{\mathrm{L}}(t)$，$g(t)$表示独立电源$v_{\mathrm{OC}}(t)$或者$i_{\mathrm{sc}}(t)$，F_0表示初始值V_0或者I_0，τ表示时间常数$R_{\mathrm{EQ}}C$或者$G_{\mathrm{EQ}}L$。

$$\begin{cases} \tau\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+f(t)=g(t) \\ f(0_+)=F_0 \end{cases}$$

一阶非齐次常微分方程的求解

方程的解由非齐次方程的特解和对应的齐次方程的通解两个分量组成：

$$f(t)=f^{'}(t)+f^{''}(t)$$

特解：$f^{'}(t)$

齐次方程 $\tau\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+f(t)=0$ 的通解： $f^{''}(t)=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

根据初始值， $f(0_+)=F_0$，$A=f(0_+)-f^{'}(0_+)$

$$f(t)=f^{'}(t)+(f(0_+)-f^{'}(0_+))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

三个要素：初始值$f(0_+)$，时间常数τ和特解$f'(t)$。

经典三要素法

通过列写微分方程，并分别求出初始值$f(0_+)$，时间常数τ和特解$f'(t)$这三个要素，计算强制分量和自由分量的方法称为经典三要素法。

外加激励$g(t)$是直流电源时，强制分量(特解)为

$$f'(t) = f'(0_+) = f(\infty)$$

三要素公式

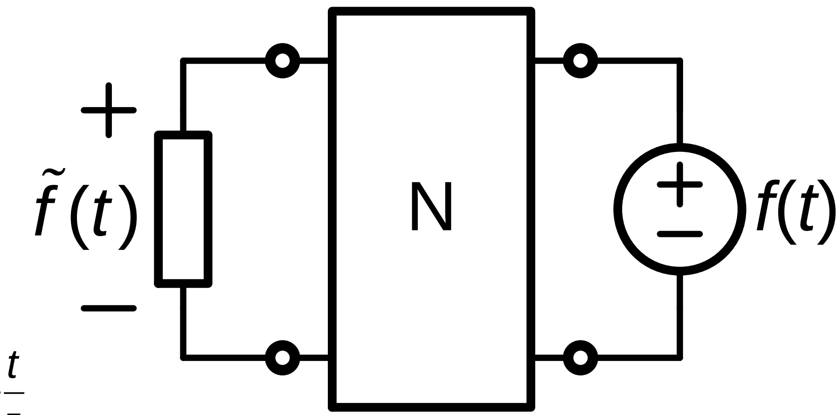
$$f(t) = f(\infty) + (f(0_+) - f(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

强制分量(特解)$f'(t)$的函数形式取决于独立电源$g(t)$。

$g(t)$函数	$f'(t)$函数
K	A
Kt	$At + B$
Kt^2	$At^2 + Bt + C$
$\mathrm{K}e^{-bt}$ $(b \neq 1/\tau)$	Ae^{-bt}
$\mathrm{K}e^{-bt}$ $(b = 1/\tau)$	Ate^{-bt}
$\mathrm{K}\cos(\omega t + \varphi)$	$A\cos(\omega t + B)$

任意电路量的三要素公式

已知$f(t)$是电路中电容电压$v_C(t)$或者电感电流$i_L(t)$，满足三要素公式



$$f(t)=f^{'}(t)+(f(0_+)-f^{'}(0_+))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\tilde{f}(t)$ 是电路中的任意电路量，试论证其也满足三要素公式

$$\tilde{f}(t)=\tilde{f}^{'}(t)+(\tilde{f}(0_+)-\tilde{f}^{'}(0_+))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

论证

根据置换定理，将电容或电感置换为电压源或者电流源$f(t)$，根据线性叠加定理，电路量 $\tilde{f}(t)$ 满足

$$\tilde{f}(t)=k_1\tilde{g}(t)+k_2f(t)=k_1\tilde{g}(t)+k_2f^{'}(t)+(k_2f(0_+)-k_2f^{'}(0_+))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

其中 $\tilde{g}(t)$ 为电路中独立源激励的线性组合。

$t=0_+$时， $\tilde{f}(0_+)=k_1\tilde{g}(0_+)+k_2f(0_+)$

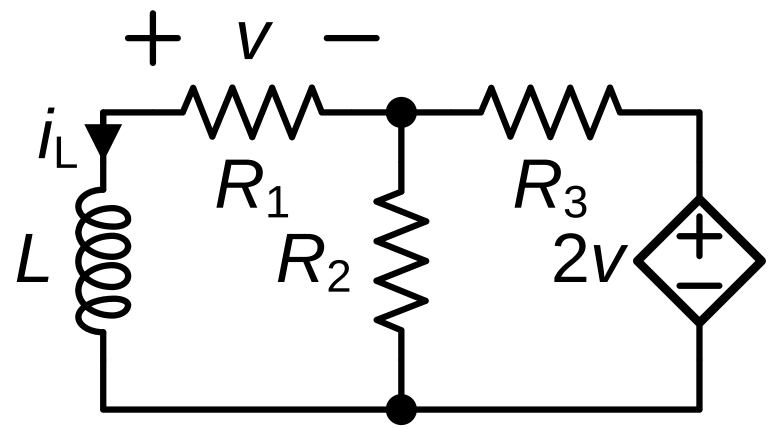
$t=\infty$时，$\tilde{f}(t)$ 的特解(强制分量) $\tilde{f}^{'}(t)=k_1\tilde{g}(t)+k_2f^{'}(t)$

$$\tilde{f}(t)=k_1\tilde{g}(t)+k_2f^{'}(t)+(k_1\tilde{g}(0_+)+k_2f(0_+)-k_1\tilde{g}(0_+)-k_2f^{'}(0_+))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=\tilde{f}^{'}(t)+(\tilde{f}(0_+)-\tilde{f}^{'}(0_+))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

例题4

如图所示电路，$R_1 = 3\ \Omega$， $R_2 = 5\ \Omega$， $R_3 = 1\ \Omega$，电感电流$i(0_) = 10$ A，$L = (1/6)$ H。求$t \geq 0$ 时电流$i_L(t)$。



$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 10\ \text{A}$$

$$i_L(\infty) = 0\ \text{A}$$

$$\begin{cases} (R_1 + R_2)I_{m1} - R_2 I_{m2} = V_X \\ -R_2 I_{m1} + (R_2 + R_3)I_{m2} = -2V \\ V = R_1 I_{m1} \end{cases}$$

$$R_{EQ} = \frac{V_X}{I_X} = \frac{53}{6}\ \Omega,\quad \tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{53}\ \text{s}$$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + (i_L(0_+) - i_L(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} = 10e^{-53t}\ \text{A} \quad (t \geq 0)$$

例题5

如图所示电路，$I_S = 2$ A，$V_S = 30$ V，$R_1 = 30$ Ω，$R_2 = 60$ Ω，$C = 0.5$ F。$t<0$时处于稳态，$t = 0$时开关接通。求$t \geq 0$ 时电压$v_C(t)$和电流$i(t)$。

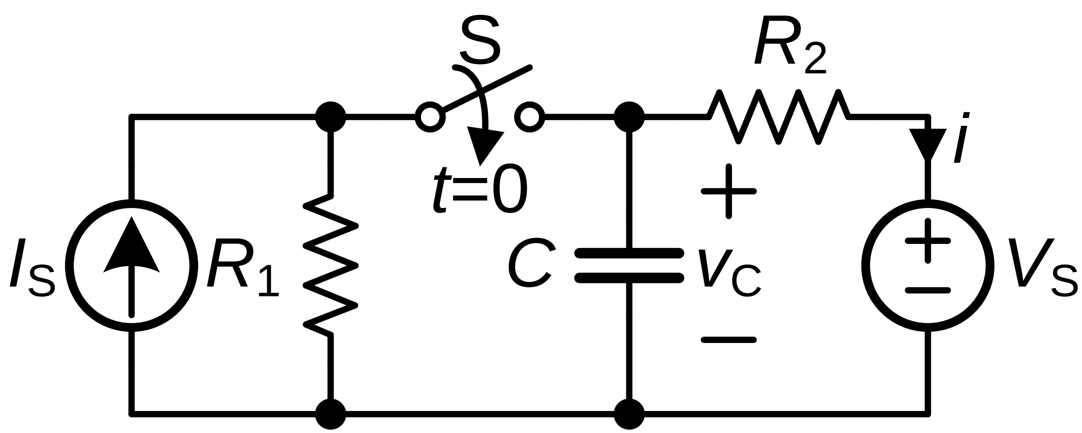
$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = 30 \text{ V}$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_C(\infty) = I_S + \frac{V_S}{R_2}$$

$$v_C(\infty) = 50 \text{ V}$$

$$R_{EQ} = R_1 \| R_2 = 20\ \Omega$$

$$\tau = R_{EQ} C = 10 \text{ s}$$



$$v_C(t) = v_C(\infty) + (v_C(0_+) - v_C(\infty)) e^{-\frac{t}{\tau}} = (50 - 20 e^{-0.1t}) \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

$$i(t) = \frac{v_C(t) - V_S}{R_2} = \frac{1}{3}(1 - e^{-0.1t}) \text{ A} \quad (t \geq 0)$$

例题6

如图所示电路，$V_{S1} = 38$ V，$V_{S2} = 12$ V，$R_1 = 20$ Ω， $R_2 = 5$ Ω， $R_3 = 6$ Ω，$L = 0.2$ H。t<0时处于稳态， $t = 0$时开关接通。求$t \geq 0$ 时电流$i_L(t)$。

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{V_{S1} - V_{S2}}{R_1 + R_3} = 1\ \text{A}$$

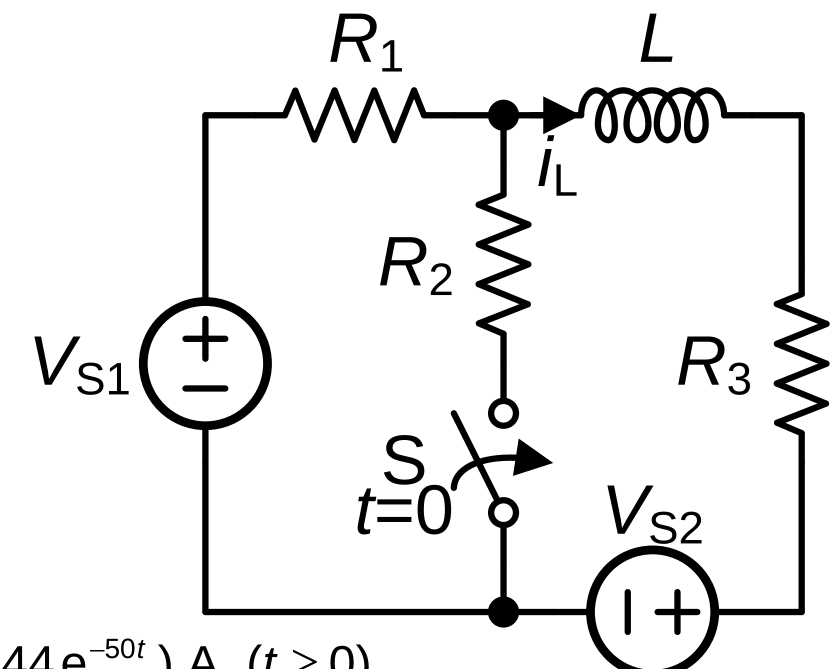
$$\begin{cases} (R_1 + R_2)I_{m1} - R_2 I_{m2} = V_{S1} \\ -R_2 I_{m1} + (R_2 + R_3)I_{m2} = -V_{S2} \end{cases}$$

$$i_L(\infty) = I_{m2} = -0.44\ \text{A}$$

$$R_{EQ} = R_1 \| R_2 + R_3 = 10\ \Omega$$

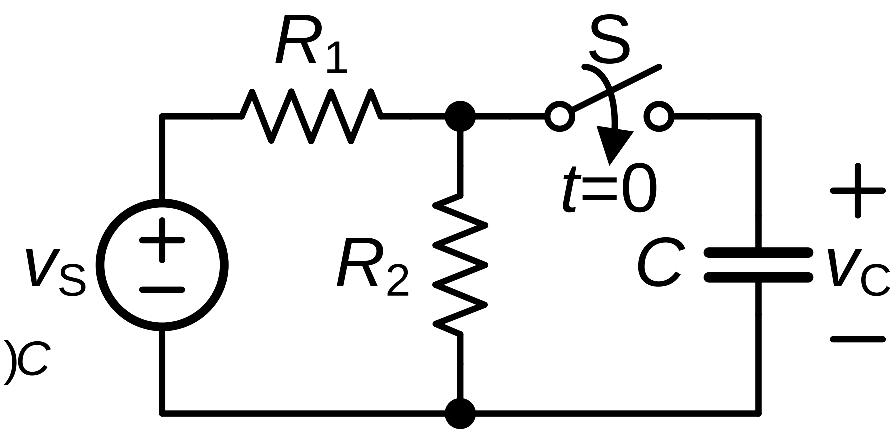
$$\tau = \frac{L}{R_{EQ}} = 0.02\ \text{s}$$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + (i_L(0_+) - i_L(\infty))e^{-\frac{t}{\tau}} = (-0.44 + 1.44e^{-50t})\ \text{A}\ \ (t \geq 0)$$



例题7

如图所示电路，$R_1 = 30\ \Omega$， $R_2 = 60\ \Omega$，$C = 1\mathrm{m\ F}$，v_S是正弦电压源，幅值90 V，角频率50 rad/s，电容的初始值为10 V。t<0时电路处于稳态，$t = 0$时开关接通，v_S为正的最大值。求$t \geq 0$ 时电压$v_C(t)$。



$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = 10\ \mathrm{V}$$

$$v_S(t) = 90\cos(50t)\ \mathrm{V},\ \dot{V}_S = 90\angle 0^\circ$$

$$\dot{V}_C = \dot{V}_S \frac{R_2 \parallel \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R_1 + R_2 \parallel \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = 30\sqrt{2}\angle -45^\circ$$

$$\tau = (R_1 \parallel R_2)C$$
$$= 0.02\ \mathrm{s}$$

$$v_C^{'}(t) = 30\sqrt{2}\cos(50t - 45^\circ)$$

$$v_C(t) = v_C^{'}(t) + (v_C(0_+) - v_C^{'}(0_+))\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = 30\sqrt{2}\cos(50t - 45^\circ) + (10 - 30\sqrt{2}\cos(-45^\circ))\mathrm{e}^{-50t}$$
$$= 30\sqrt{2}\cos(50t - 45^\circ) - 20\mathrm{e}^{-50t},\ (t \geq 0)$$

二阶电路的零输入响应

可用二阶常微分方程描述的电路称为二阶电路。在二阶电路中，给定的初始值有两个，它们分别是动态元件的初始值。

最简单的二阶电路：*RLC*串联电路和*GLC*并联电路。

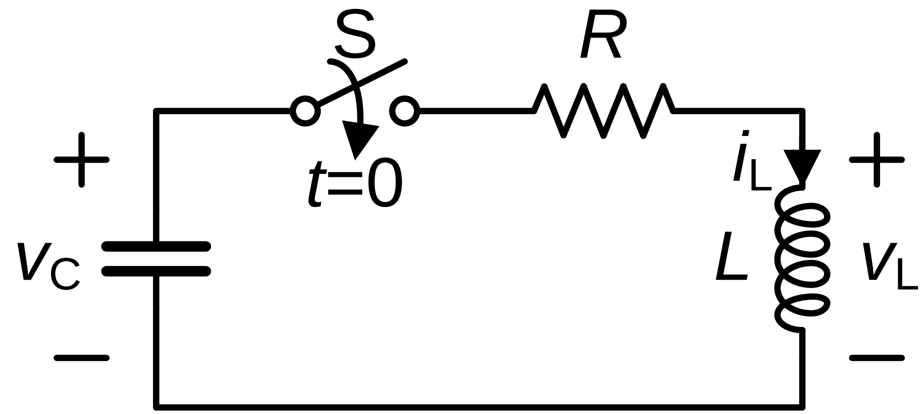
RLC电路的零输入响应

$t<0$时，开关S断开，

$v_C = V_0$，$i_L = I_0$。

$t=0$时，开关闭合

$t>0$时，电容C放电。



电路的二阶常微分方程：

$$v_C(t)-v_R(t)-v_L(t)=v_C(t)-Ri_L(t)-L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=0$$

$$LC\frac{\mathrm{d}v_C^2(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}+v_C(t)=0$$

初始值：$v_C(0_+) = v_C(0_-) = V_0$，$i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$

二阶常微分方程的求解

通解：

$$v_{\mathrm{C}}(t)=A\mathrm{e}^{pt}$$

$$LC\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}^{2}(t)}{\mathrm{dt}}+RC\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{dt}}+v_{\mathrm{C}}(t)=0=(LCp^{2}+RCp+1)A\mathrm{e}^{pt}=0$$

特征方程：

$$LCp^{2}+RCp+1=0$$

特征根：

$$p=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{(\frac{R}{2L})^{2}-\frac{1}{LC}}$$

可得，

$$v_{\mathrm{C}}(t)=A_{1}\mathrm{e}^{p_{1}t}+A_{2}\mathrm{e}^{p_{2}t}$$

$$p_{1}=-\frac{R}{2L}+\sqrt{(\frac{R}{2L})^{2}-\frac{1}{LC}},\ \ p_{2}=-\frac{R}{2L}-\sqrt{(\frac{R}{2L})^{2}-\frac{1}{LC}}$$

根据初始值$v_C(0_+) = v_C(0_-) = V_0$，$i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$

$$i_L(t) = -C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+} = i_L(0_+) = i_L(0_-) = -\frac{I_0}{C}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = V_0 \\ p_1A_1 + p_2A_2 = I_0 \end{cases} \xrightarrow{V_0 \neq 0, I_0 = 0,} \begin{cases} A_1 = \dfrac{p_2V_0}{p_2 - p_1} \\ A_2 = -\dfrac{p_1V_0}{p_2 - p_1} \end{cases}$$

特征根有三种情况：1. 两个不等的负实根；2. 一对实部为负的共轭复根；3. 一对相等的负实根。

1. $R>2\sqrt{L/C}$，非振荡放电过程

特征根是两个不等的负实根

电容上的电压：

$$v_C(t)=\frac{V_0}{p_2-p_1}(p_2\mathrm{e}^{p_1t}-p_1\mathrm{e}^{p_2t})$$

$$p_1p_2=\frac{1}{LC}$$

电感上的电流：

$$i_L(t)=-C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{V_0}{L(p_2-p_1)}(\mathrm{e}^{p_1t}-\mathrm{e}^{p_2t})$$

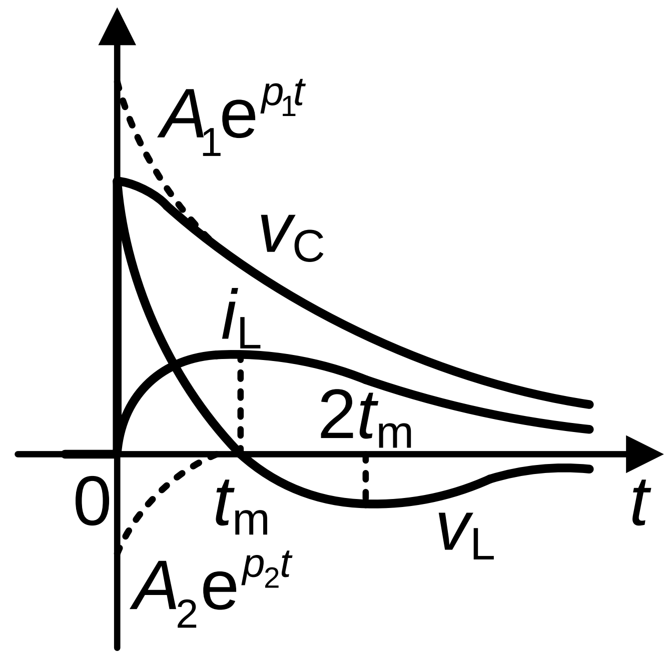
电感上的电压：

$$v_L(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{V_0}{L(p_2-p_1)}(p_1\mathrm{e}^{p_1t}-p_2\mathrm{e}^{p_2t})$$

电压和电流随时间变化的曲线

v_C和i_L始终不改变方向，且$v_C \geq 0$，$i_L \geq 0$，表明电容在整个过程中一直在释放储存的电荷，因此称为非振荡放电，又称为阻尼放电。

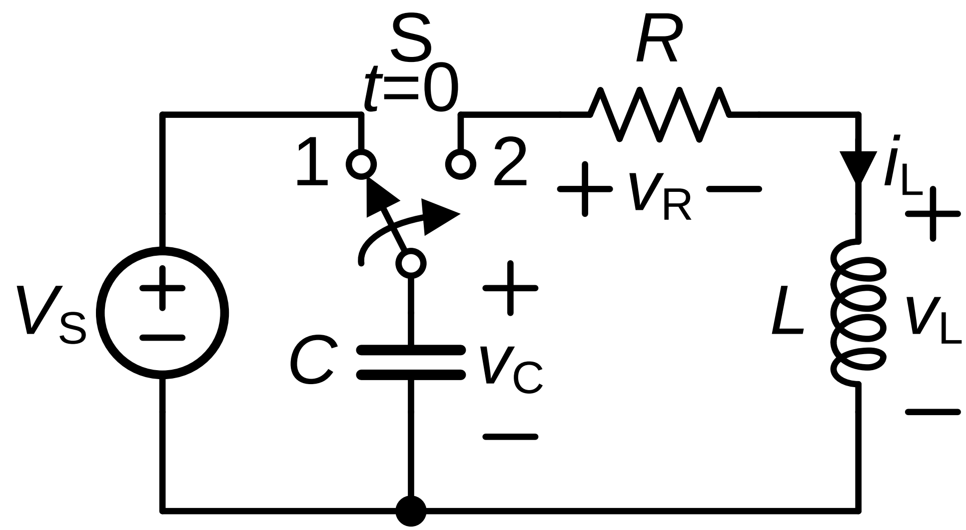
最大电流时刻t_m：



$$\frac{di_L(t)}{dt} = 0, \quad t_m = \frac{\ln(p_2/p_1)}{p_1 - p_2}$$

例题8

如图所示电路，$V_S = 10$ V，$C = 1$ μF，$R = 4$k Ω，$L = 1$ H，$t < 0$时开关S闭合1处，$t = 0$时开关S由位置1切换至位置2处。1. 求$t \geq 0$时v_C，v_R，v_L和i_L；2. 求i_{max}值。



$$R = 4\text{k }\Omega > 2\sqrt{L/C} = 2\text{k }\Omega$$

$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = V_S$$

$$p_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} = -268,$$

$$p_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} = -3732$$

$$v_C(t) = \frac{V_0}{p_2 - p_1}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) = (10.77\,e^{-268t} - 0.773e^{-3732t})\text{ V}$$

$$i_L(t) = -C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{V_0}{L(p_2 - p_1)}(\mathrm{e}^{p_1 t} - \mathrm{e}^{p_2 t}) = 2.89(\mathrm{e}^{-286t} + \mathrm{e}^{-3732t})\ \mathrm{mA}$$

$$v_R(t) = Ri_L(t) = 11.56(\mathrm{e}^{-286t} - \mathrm{e}^{-3732t})\ \mathrm{V}$$

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = (10.77\,\mathrm{e}^{-286t} - 0.773\mathrm{e}^{-3732t})\ \mathrm{V}$$

$$t_m = \frac{\ln(p_2/p_1)}{p_1 - p_2} = 760\ \mu\mathrm{s}$$

$$i_{max} = 2.89(\mathrm{e}^{-286\times7.60\times10^{-4}} + \mathrm{e}^{-3732\times7.60\times10^{-4}})\ \mathrm{mA} = 2.19\ \mathrm{mA}$$

2. $R < 2\sqrt{L/C}$，振荡放电过程

特征根是一对实部为负的共轭复数

令 $$\alpha = \frac{R}{2L},\quad \omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2$$

特征根 $$p_1 = -\alpha + \mathrm{j}\omega,\quad p_2 = -\alpha - \mathrm{j}\omega$$

电容上的电压：

$$v_C(t) = \frac{V_0}{p_2 - p_1}\left(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}\right) = \frac{V_0}{\omega} e^{-\alpha t}(\alpha \sin\omega t + \omega\cos\omega t)$$

$$= \frac{V_0 \omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \beta)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

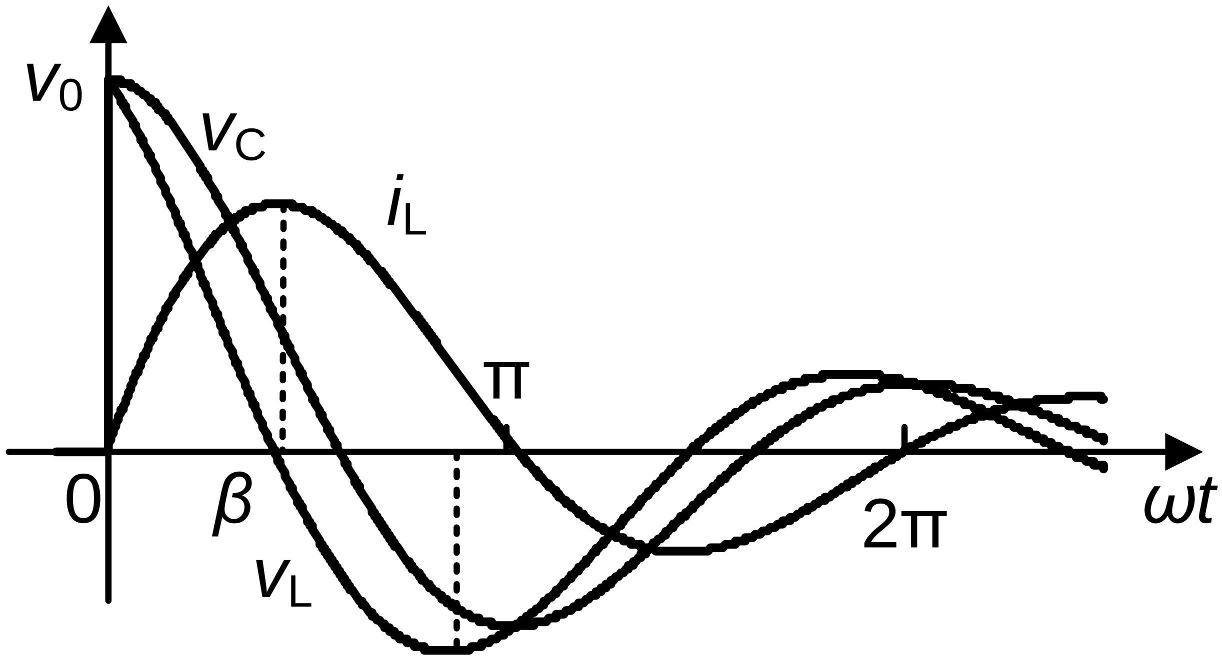
电感上的电流：

$$i_{\mathrm{L}}(t) = -C\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{V_0}{L(p_2 - p_1)}(\mathrm{e}^{p_1 t} - \mathrm{e}^{p_2 t}) = \frac{V_0}{\omega L}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t)$$

电感上的电压：

$$v_{\mathrm{L}}(t) = L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{V_0\omega_0}{\omega}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t + \beta)$$

电压和电流随时间变化的曲线



(1) $\omega t = k\pi$ 为i_L的过零点，也是v_C的极值点；

(2) $\omega t = k\pi + \beta$ 为v_L的过零点，也是i_L的极值点；

(3) $\omega t = k\pi - \beta$ 为vC的过零点，也是i_L的极值点；

$R=0$，等幅振荡

特征根是一对实部为零的共轭复数

令 $\alpha = 0,\ \ \omega^2 = \dfrac{1}{LC}$

特征根 $p_1 = +\mathrm{j}\omega,\ \ p_2 = -\mathrm{j}\omega$

电容上的电压，电感上的电流和电压分别是

$$v_\mathrm{C}(t) = \frac{V_0}{p_2 - p_1}\left(p_2 \mathrm{e}^{p_1 t} - p_1 \mathrm{e}^{p_2 t}\right) = V_0 \cos \omega t$$

$$i_\mathrm{L}(t) = \frac{V_0}{\omega L}\sin(\omega t) \qquad v_\mathrm{L}(t) = L\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}(t)}{\mathrm{d}t} = V_0 \cos(\omega t)$$

例题9

已知*RLC*串联放电电路，V_0 = 15 kV, C = 1700 μF, R = 0.6 mΩ，L = 6 nH，试计算，(1) 电流$i(t)$，(2) $i(t)$何时达到极大值？求i_{max}值。

$$\alpha=\frac{R}{2L}=5\times10^{4}\ \mathrm{s}^{-1},\quad \omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-(\frac{R}{2L})^{2}}=3.09\times10^{5}\ \mathrm{rad/s}$$

$$\beta=\arctan(\frac{\omega}{\alpha})=1.41\ \mathrm{rad}$$

$$i_{\mathrm{L}}(t)=\frac{V_0}{\omega L}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\omega t)=8.09\times10^{6}\mathrm{e}^{-5\times10^{4}t}\sin(3.09\times10^{5}t)\ \mathrm{A}$$

$$t=\frac{\beta}{\omega}=4.56\ \mu s \qquad i_{\max}=8.09\times10^{6}\mathrm{e}^{-5\times10^{4}\times4.56\times10^{-6}}\sin(3.09\times10^{5}\times4.56\times10^{-6})\ \mathrm{A}$$

$$=6.36\times10^{6}\ \mathrm{A}$$

3. $R=2\sqrt{L/C}$，临界状态

特征根是一对负实数重根

$$p_1=p_2=-\alpha=-\frac{R}{2L}$$

通解 $$v_C=(A_1+A_2t)e^{-\alpha t}$$

初始值 $$\begin{cases} A_1=V_0 \\ -A_1\alpha+A_2=I_0 \end{cases} \xrightarrow{V_0\neq 0, I_0=0,} \begin{cases} A_1=V_0 \\ A_2=\alpha V_0 \end{cases}$$

电容上的电压，电感上的电流和电压分别是

$$v_C(t)=V_0(1+\alpha t)e^{-\alpha t} \qquad i_L(t)=-C\frac{dv_C(t)}{dt}=\frac{V_0}{L}te^{-\alpha t}$$

$$v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}=V_0(1-\alpha t)e^{-\alpha t}$$

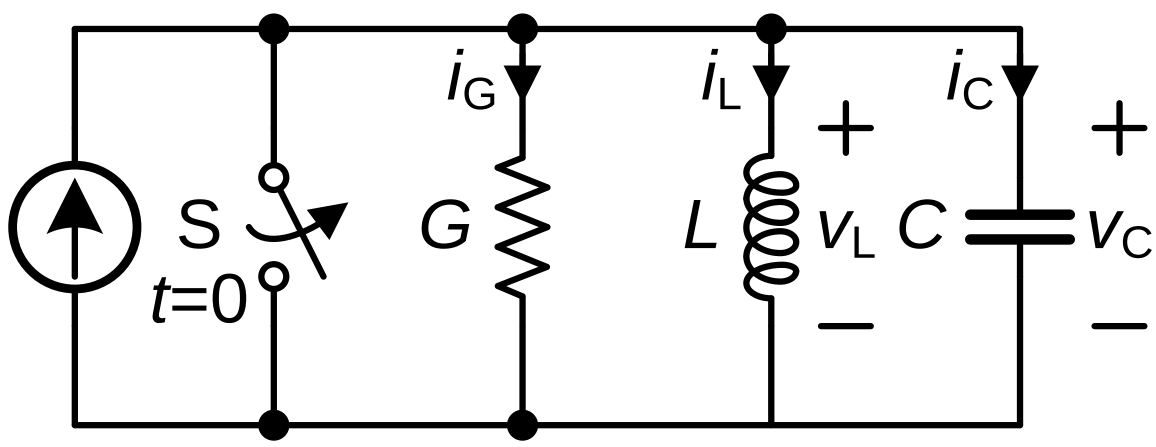
二阶电路的零状态响应和全响应

二阶电路的零状态响应就是二阶电路在零初始状态下(动态元件初始值为零)由外加激励引起的响应。

二阶电路在非零初始状态下，由外加激励引起的响应称为二阶电路的全响应。

例题10

如图所示电路，$v_C(0_-) = 0$ V，$i_L(0_-) = 0$ A，$G = 2\times10^{-3}$ S，$C = 1$ μF，$L = 1$ H，$I_S = 1$ A，当$t = 0$时开关S打开。求响应$i_L(t)$，$v_C(t)$和$i_C(t)$。



常微分方程

$$i_G(t)+i_L(t)+i_C(t)=I_S, \quad LC\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}+GL\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=0$$

特征根 $\quad LCp^2+GLp+1=0 \qquad p_1=p_2=p=-10^3$

特解 $i_L^{'}(t)=I_S=1\,\mathrm{A}$， 通解 $i_L^{''}(t)=(A_1+A_2t)\mathrm{e}^{pt}$

解 $\quad i_L(t)=i_L^{'}(t)+i_L^{''}(t)=1+(A_1+A_2t)\mathrm{e}^{pt}$

初始值

$$\begin{cases} i_L(0_+)=i_L(0_-)=0 \\ \left.\dfrac{di_L(t)}{dt}\right|_{0_+}=\dfrac{1}{L}v_L(0_+)=\dfrac{1}{L}v_L(0_-)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+A_1=0 \\ -10^3A_1+A_2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1=-1 \\ A_2=-10^3 \end{cases}$$

电感上的电流

$$i_{\mathrm{L}}(t)=\left[1-(1+10^3t)\mathrm{e}^{-10^3t}\right]\ \mathrm{A}$$

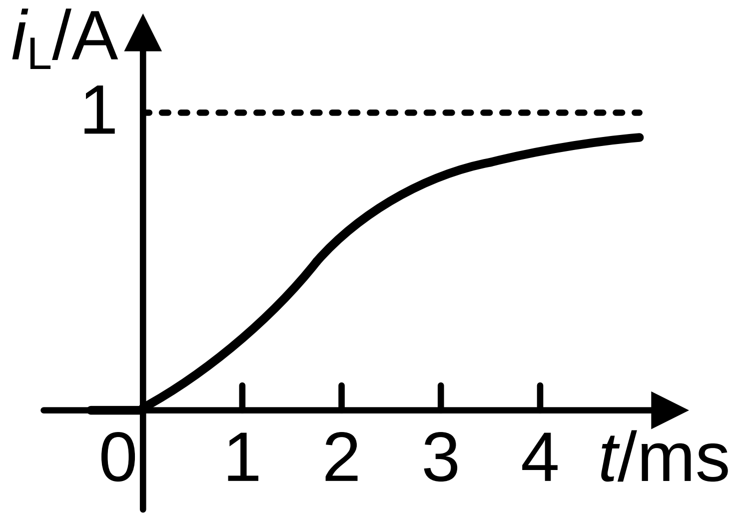
电容上的电压

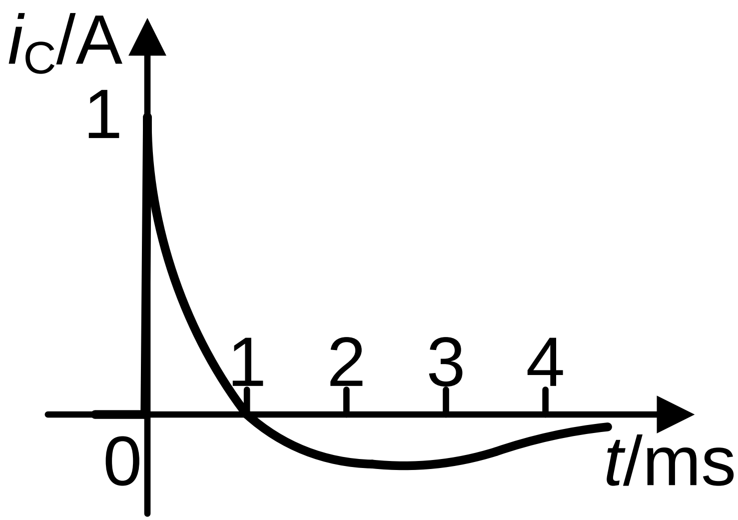
$$v_{\mathrm{C}}(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=10^6t\mathrm{e}^{-10^3t}\ \ \mathrm{V}$$

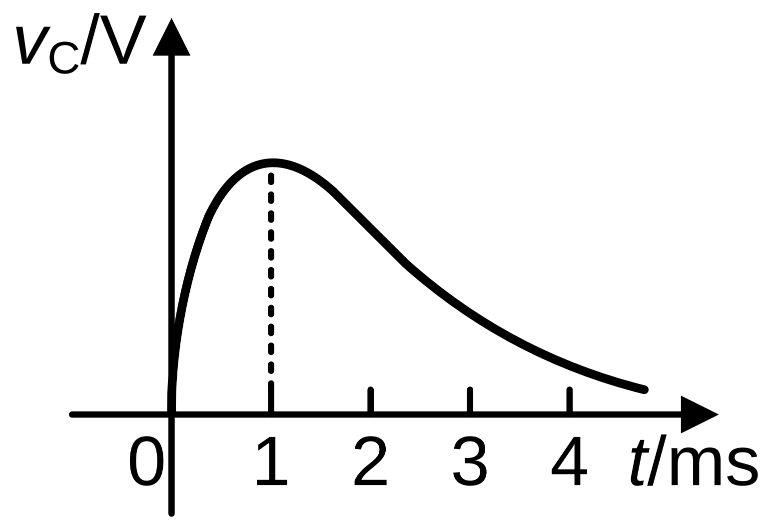
电容上的电流

$$i_{\mathrm{C}}(t)=C\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t}=(1-10^3t)\mathrm{e}^{-10^3t}\ \ \mathrm{A}$$

电压和电流随时间变化的曲线

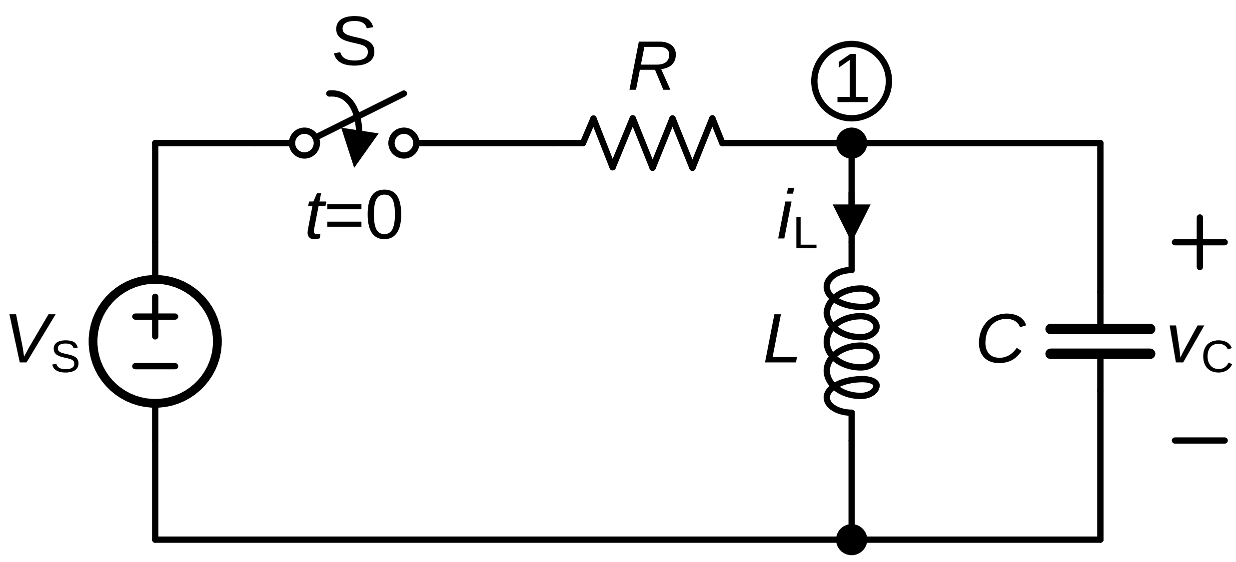






例题11

如图所示电路，$v_C(0_-) = 0$ V，$i_L(0_-) = 2$ A，$R = 50$ Ω，$C = 100$ μF，$L = 0.5$ H，$V_S = 50$ V，当$t = 0$时开关S闭合。求电感中电流$i_L(t)$。



节点1列KCL方程，可得常微分方程

$$\frac{V_S - L\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}}{R} = i_L(t) + LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L(t)}{\mathrm{d}t^2},\quad RLC\frac{\mathrm{d}^2 i_L(t)}{\mathrm{d}t^2} + L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} + Ri_L(t) = V_S$$

特征根 $$RLCp^2 + Lp + R = 0 \qquad p = -100 \pm \mathrm{j}100$$

特解 $i_L^{'}(t) = \dfrac{V_S}{R} = 1\ \mathrm{A}$，通解 $i_L^{''}(t) = Ae^{-100t}\sin(100t+\beta)$

解

$$i_L(t) = i_L^{'}(t) + i_L^{''}(t) = 1 + Ae^{-100t}\sin(100t+\beta)$$

初始值

$$\begin{cases} i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2\ \mathrm{A} \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+} = \dfrac{1}{L}v_C(0_+) = \dfrac{1}{L}v_C(0_-) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 + A\sin\beta = 2 \\ 100A\cos\beta - 100A\sin\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{2} \\ \beta = 45^\circ \end{cases}$$

电感上的电流

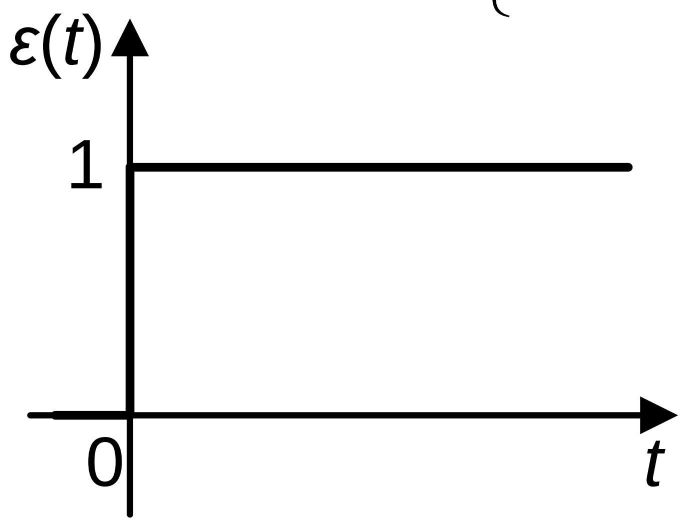
$$i_L(t) = 1 + Ae^{-100t}\sin(100t+\beta) = \left[1 + \sqrt{2}e^{-100t}\sin(100t+45^\circ)\right]\ \mathrm{A}$$

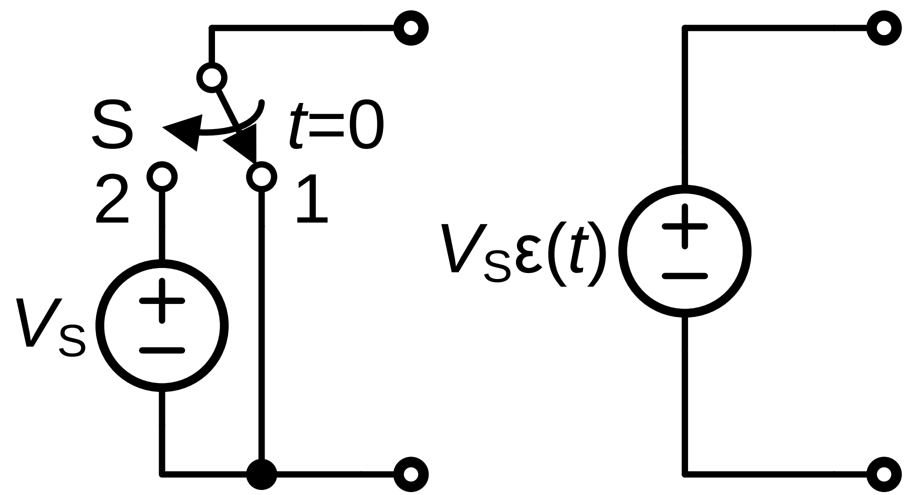
阶跃响应

激励源为单位阶跃函数的零状态响应称为单位阶跃响应。通常用$s(t)$表示。

单位阶跃函数是一种奇异函数，也称为开关函数。

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$$



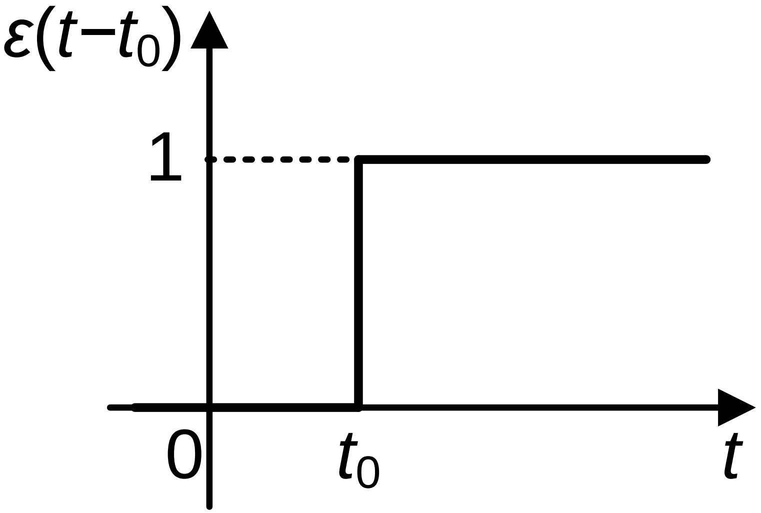


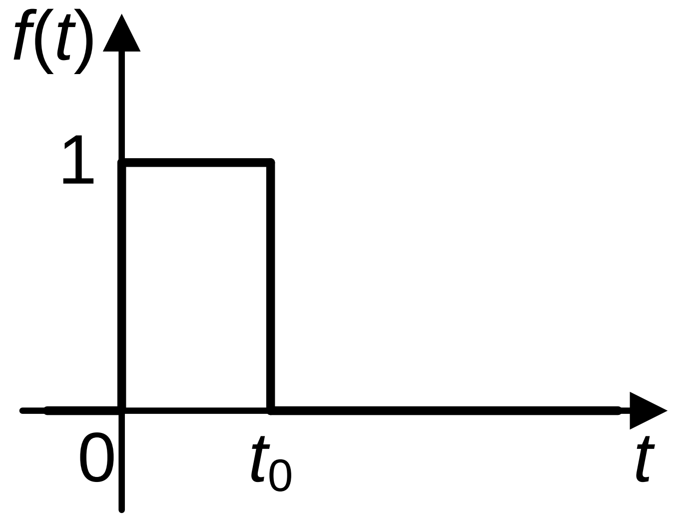
延迟单位阶跃函数

$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases}$$

矩形脉冲函数

$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$$

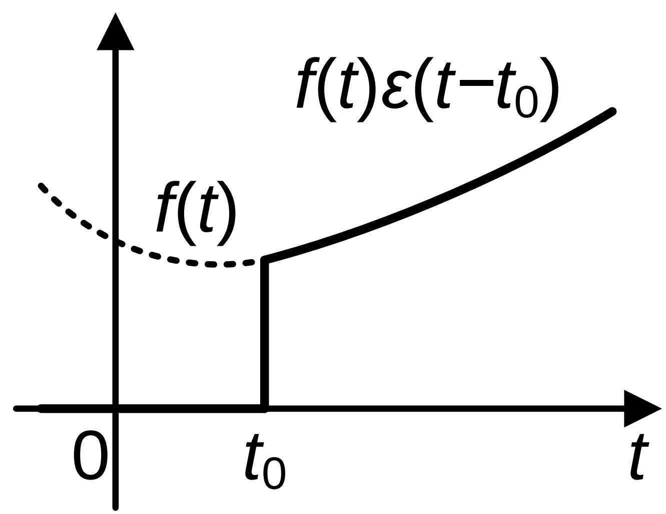




单位阶跃函数的“起始”性质

单位阶跃函数可以用来“起始”任意一个函数。

$$f(t)\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ f(t) & t>t_0\end{cases}$$



例题12

如图所示电路，开关S合在位置1时电路已达到稳定状态。$t = 0$时，开关由位置1合向位置2，在$t = RC$时又由位置2合向位置1,求$t \geq 0$时的电容电压$v_C(t)$。

两种方法求解，

1. 分段求解

$0 < t < RC = \tau$，零状态响应

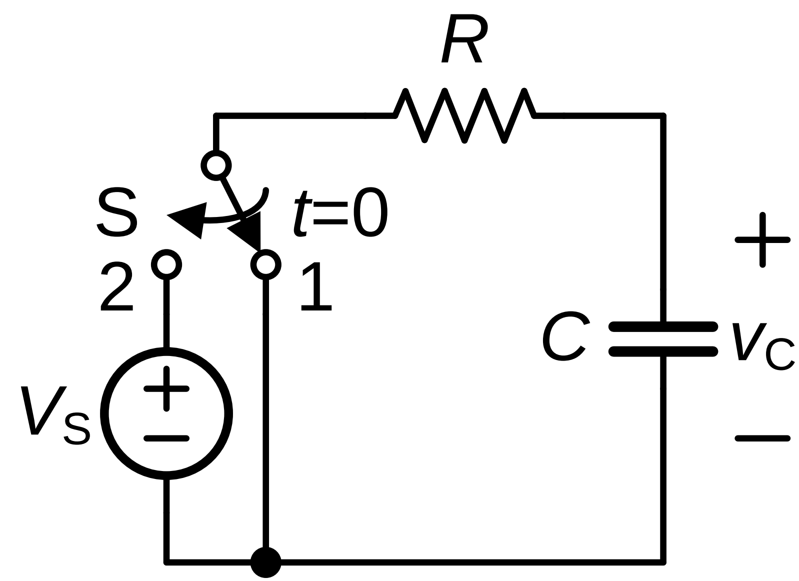
$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = 0$$

$$v_C(t) = V_S(1 - e^{-t/\tau})$$

$\tau < t < \infty$，零输入响应

$$v_C(\tau) = V_S(1 - e^{-1}) = 0.632V_S$$

$$v_C(t) = v_C(\tau)e^{-\frac{t-\tau}{\tau}} = 0.632V_S e^{-\frac{t-\tau}{\tau}}$$

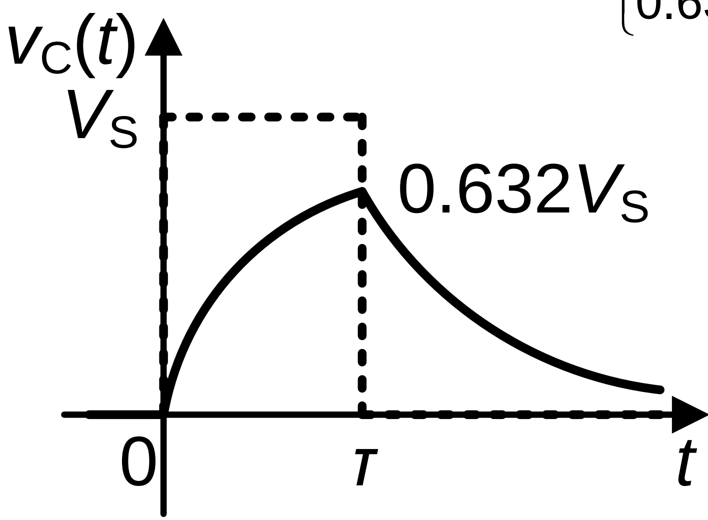


2. 用阶跃函数表示激励

$$v_S(t) = V_S\left[\varepsilon(t) - \varepsilon(t - t_0)\right]$$

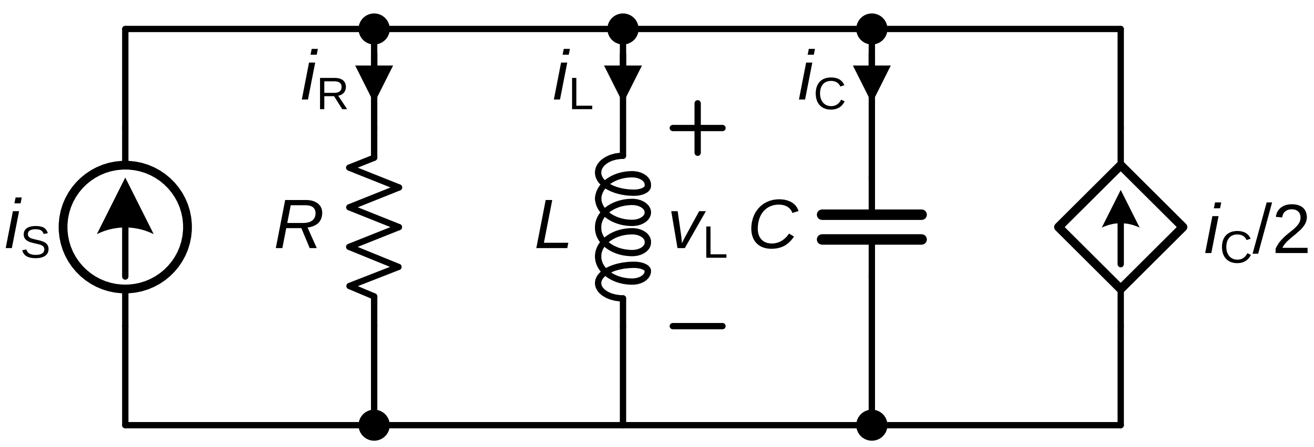
单位阶跃响应 $s(t) = (1 - e^{-t/\tau})\varepsilon(t)$

$$v_C(t) = V_S(1 - e^{-t/\tau})\varepsilon(t) - V_S(1 - e^{-(t-\tau)/\tau})\varepsilon(t - \tau) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ V_S(1 - e^{-t/\tau}) & (0 \le t < \tau) \\ 0.632 V_S\, e^{-\frac{t-\tau}{\tau}} & t \ge \tau \end{cases}$$



例题13

如图所示电路，$v_C(0_-) = 0$，$i_L(0_-) = 0$，$R = 0.2\ \Omega$，$L = 0.25$ H，$C = 2$ F，$i_S(t) = \varepsilon(t)$ A，试求单位阶跃响应$i_L(t)$。



列KCL方程，可得常微分方程

$$-i_S(t)+i_R(t)+i_C(t)+i_L(t)-\frac{i_C(t)}{2}=0,\quad \frac{LC}{2}\frac{\mathrm{d}^2 i_L(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+i_L(t)=i_S(t)$$

特征根 $\frac{LC}{2}p^2+\frac{L}{R}p+1=0$ $\quad p_1=-1,\ p_2=-4$

特解 $i_L^{'}(t)=1\ \mathrm{A}$ ，通解 $i_L^{''}(t)=A_1 e^{p_1 t}+A_2 e^{p_2 t}$

解

$$i_L(t)=i_L^{'}(t)+i_L^{''}(t)=1+A_1 e^{-t}+A_2 e^{-4t}$$

初始值

$$\begin{cases} i_L(0_+)=i_L(0_-)=0 \\ \left.\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=\frac{1}{L}v_C(0_+)=\frac{1}{L}v_C(0_-)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+A_1+A_2=0 \\ -A_1-4A_2=0 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} A_1=-\frac{4}{3} \\ A_1=\frac{1}{3} \end{cases}$$

电感上的电流

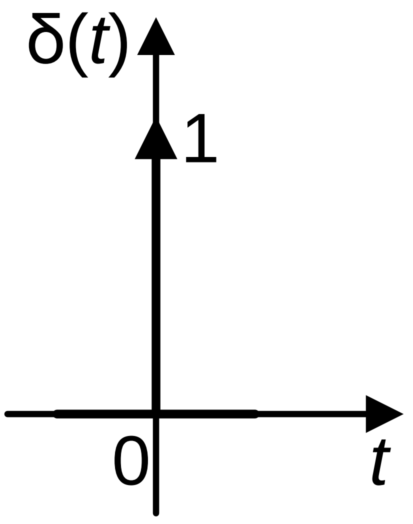
$$i_L(t)=s(t)=(1-\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-4t})\varepsilon(t)\ \mathrm{A}$$

冲激响应

激励源为单位冲激函数的零状态响应称为单位冲激响应。通常用$h(t)$表示。

单位冲激函数是一种奇异函数，也称为δ函数。

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \int_{0_-}^{0_+} \delta(t)\mathrm{d}t = 1 & t = 0 \end{cases}$$

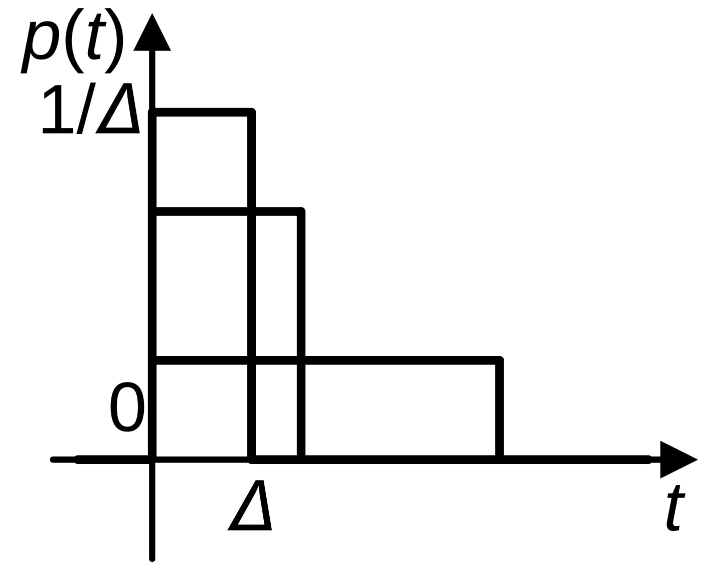


$t = 0$处，函数值趋于无穷，

积分值为1。

单位冲激函数与单位阶跃函数

单位矩形脉冲函数$p(t)$，高度为$1/\Delta$，宽度为Δ，面积为1。当宽度Δ趋近于0，脉冲高度$1/\Delta$趋近于∞。这种宽度趋于零，幅度趋于无穷大，面积为1的脉冲，称为单位冲击函数$\delta(t)$。



$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t),\quad \int_{-\infty}^{t}\delta(\xi)\mathrm{d}\xi=\varepsilon(t)$$

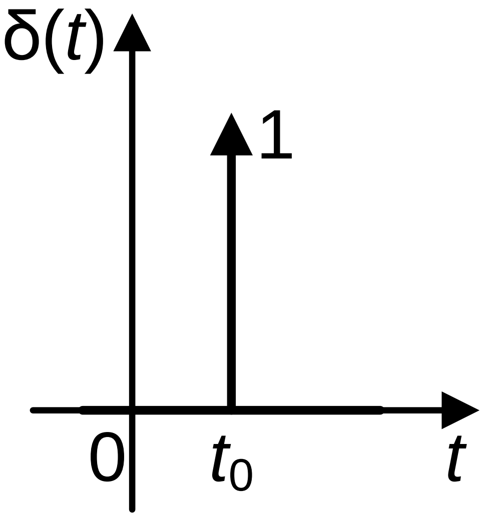
$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}=h(t),\quad \int_{-\infty}^{t}h(\xi)\mathrm{d}\xi=s(t)$$

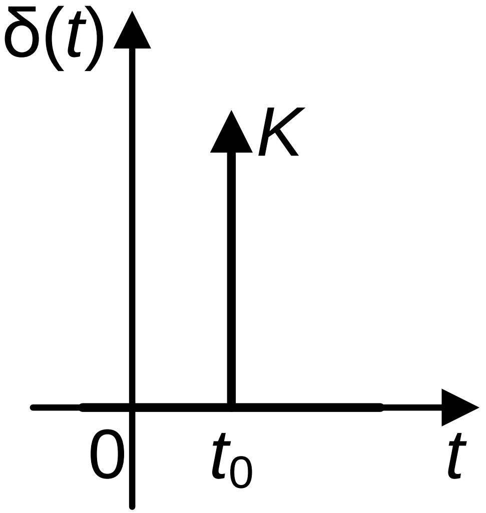
延迟单位冲击函数

$$\delta(t-t_0)$$

强度为K的冲击函数

$$K\delta(t-t_0)$$



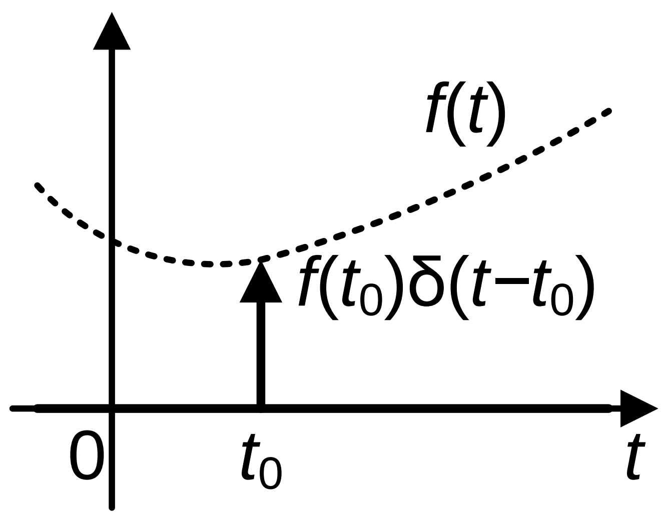


单位冲激函数的“筛选”性质

单位冲激函数可以用来“筛选”一个函数的任意时刻的函数值。“筛选”特性又称取样性质

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t),\ \ f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0),\ \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)$$



一个单位冲激电流$\delta_i(t)$加到初始电压为零且C = 1 F的电容上，电容电压为

$$v_C(0_+) = \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} \delta_i(t)\,\mathrm{d}t = 1\ \mathrm{V}$$

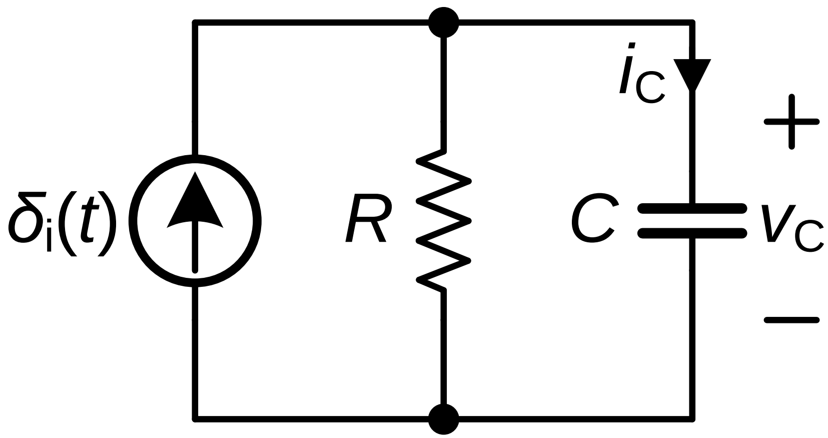
这相当于单位冲激电流瞬间把电荷转移到电容上，使得电容电压从零跃变到1 V。

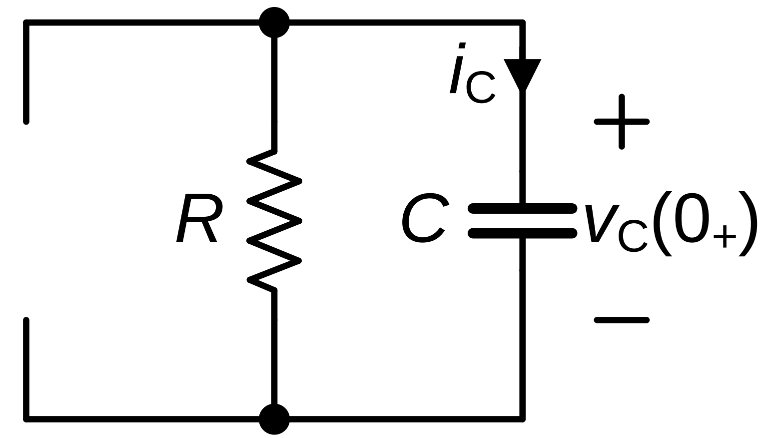
一个单位冲激电压$\delta_v(t)$加到初始电流为零且L = 1 H的电感上，电感电流为

$$i_L(0_+) = \frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} \delta_v(t)\,\mathrm{d}t = 1\ \mathrm{A}$$

这相当于单位冲激电压瞬间在电感内建立了1 A电路，即电感电流从零跃变到1 A。

一阶RC电路的单位冲激响应



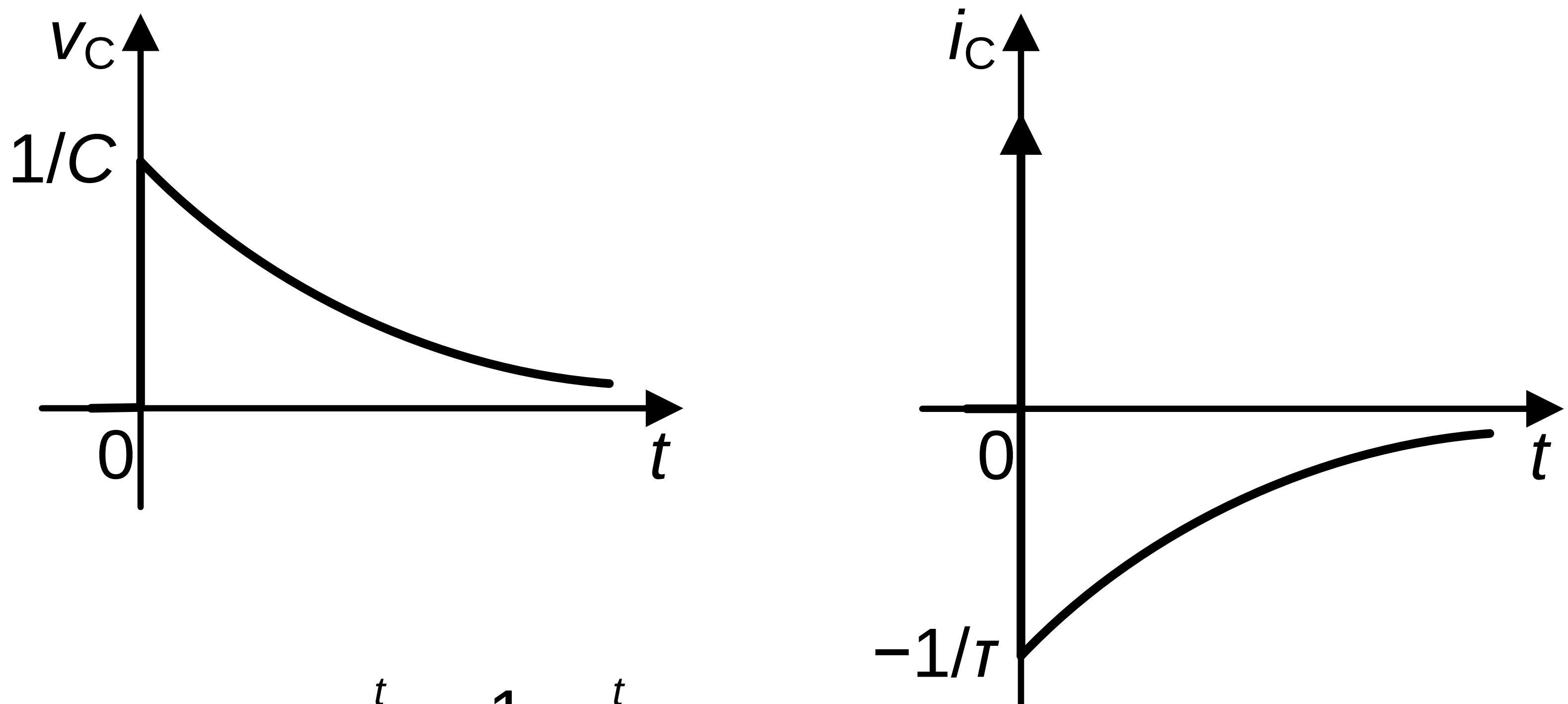


$$C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{v_C(t)}{R}=\delta_i(t),\quad v_C(0_-)=0$$

$$\int_{0_-}^{0_+}C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}+\int_{0_-}^{0_+}\frac{v_C(t)}{R}=\int_{0_-}^{0_+}\delta_i(t),\quad C\left[v_C(0_+)-v_C(0_-)\right]+0=1$$

$$v_C(0_+)=\frac{1}{C}\qquad v_C(t)=v_C(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

电压和电流随时间变化的曲线

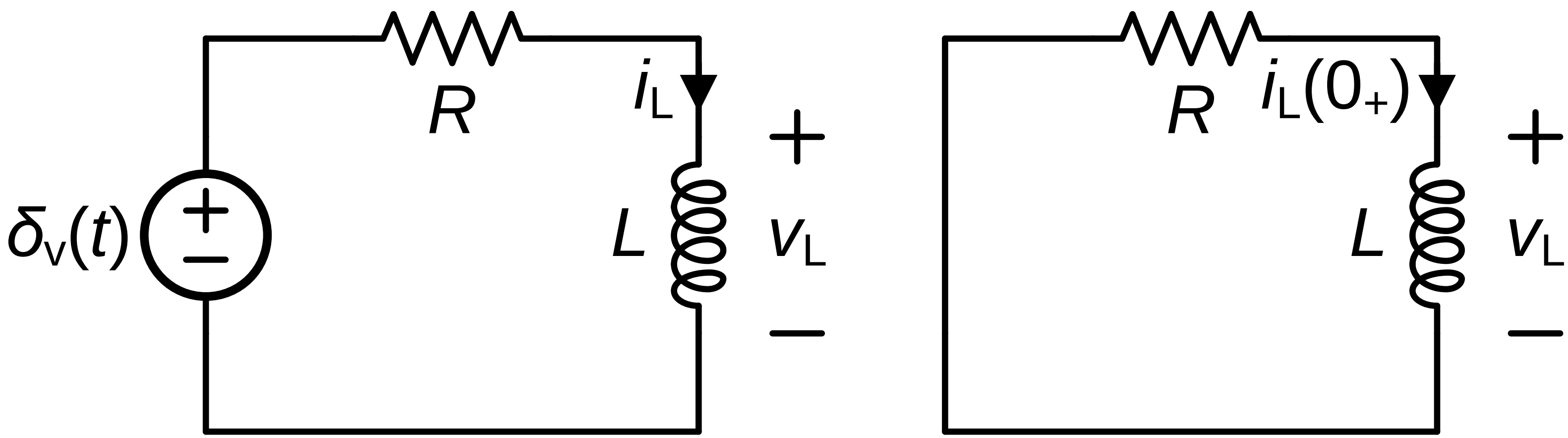


$$v_C(t) = v_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

$$\tau = RC$$

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = \delta(t) - \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

一阶RL电路的单位冲激响应

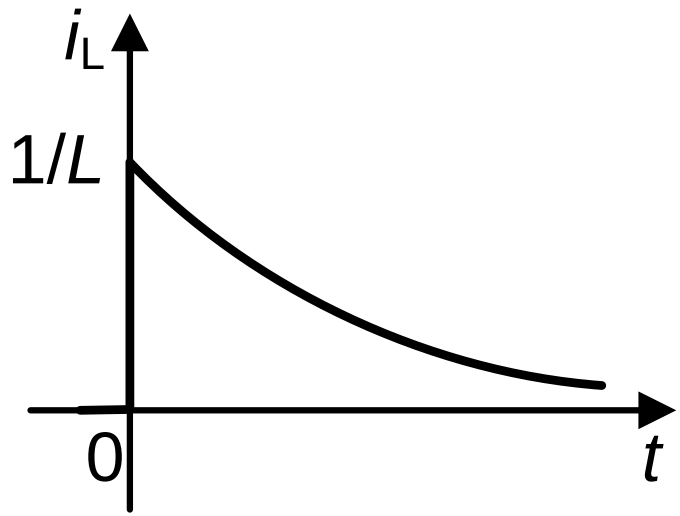


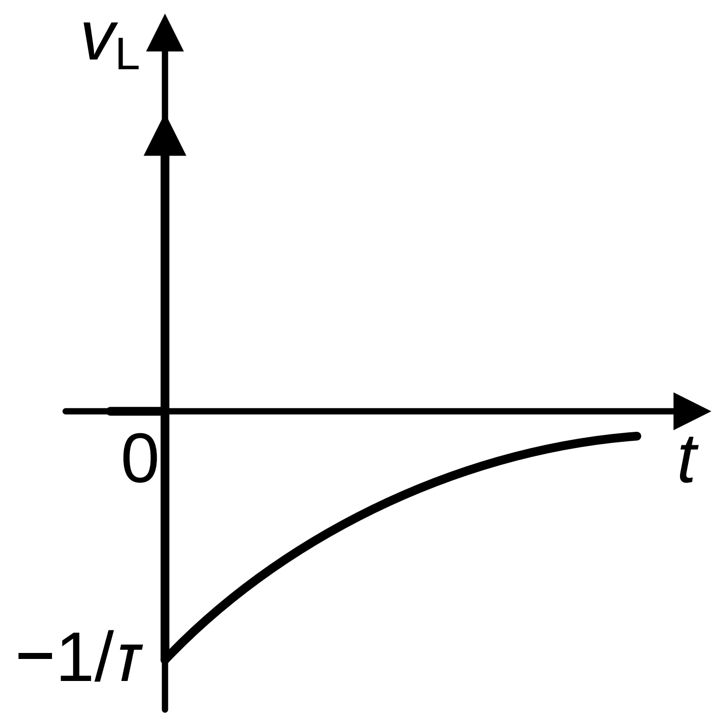
$$L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+Ri_L(t)=\delta_v(t),\quad i_L(0_-)=0$$

$$\int_{0_-}^{0_+}L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}+\int_{0_-}^{0_+}Ri_L(t)=\int_{0_-}^{0_+}\delta_v(t),\quad L\left[i_L(0_+)-i_L(0_-)\right]+0=1$$

$$i_L(0_+)=\frac{1}{L}\qquad i_L(t)=i_L(0_+)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{1}{L}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

电压和电流随时间变化的曲线





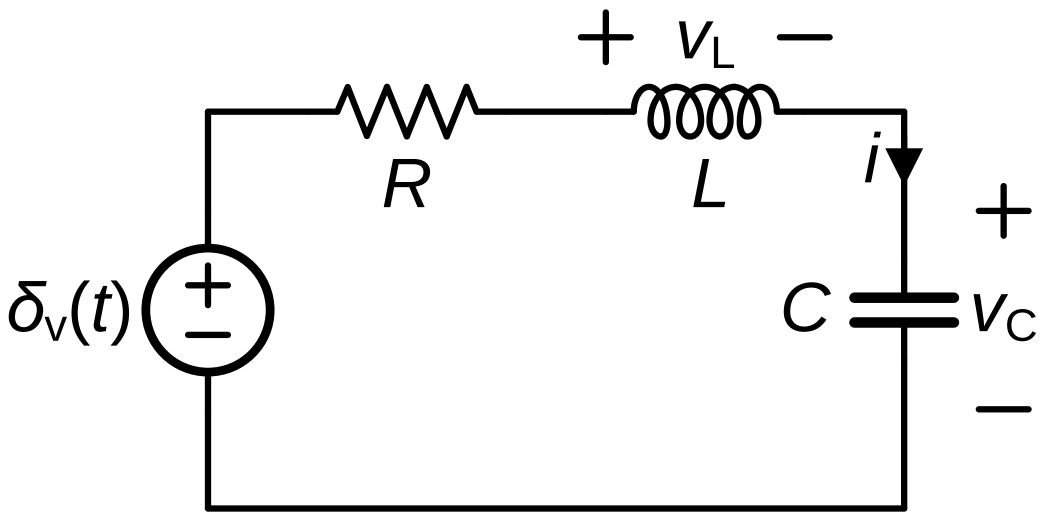
$$i_L(t) = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = \delta(t) - \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

二阶电路的单位冲激响应

$$\begin{cases} LC\dfrac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+RC\dfrac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \\ +v_C(t)=\delta_v(t) \\ v_C(0_-)=0,\ \ i_L(0_-)=0 \end{cases}$$



$$\int_{0_-}^{0_+} LC\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+\int_{0_-}^{0_+} RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}+\int_{0_-}^{0_+} v_C(t)=\int_{0_-}^{0_+}\delta_v(t)$$

$$LC\left[\left.\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}-\left.\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{0-}\right]+RC\left[v_C(0_+)-v_C(0_-)\right]+\int_{0_-}^{0_+} v_C(t)=1$$

$$i(0_+)=C\left.\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+}=\frac{1}{L}$$

1. $R > 2\sqrt{L/C}$ $\quad v_C(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$

$$\begin{cases} v_C(0_+) = A_1 + A_2 = 0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+} = p_1 A_1 + p_2 A_2 = \dfrac{1}{LC} \end{cases} \qquad A_1 = -A_2 = -\frac{1}{LC(p_2 - p_1)}$$

$$v_C(t) = -\frac{1}{LC(p_2 - p_1)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)$$

2. $R < 2\sqrt{L/C}$ $\quad v_C(t) = A e^{-\alpha t}\sin(\omega t + \beta)$

$$\begin{cases} v_C(0_+) = A\sin\beta = 0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{0_+} = A(-\alpha\sin\beta + \omega\cos\beta) = \dfrac{1}{LC} \end{cases} \qquad A = \frac{1}{\omega LC},\quad \beta=0$$

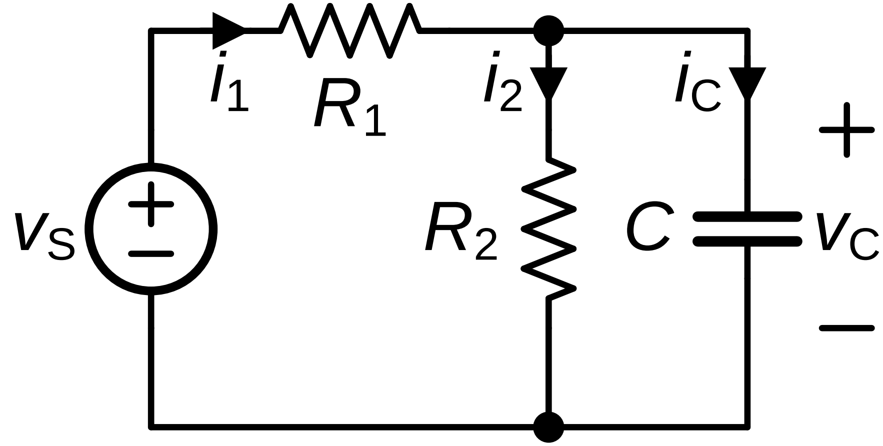
$$v_C(t) = \frac{1}{\omega LC} e^{-\alpha t}\sin(\omega t)$$

例题14

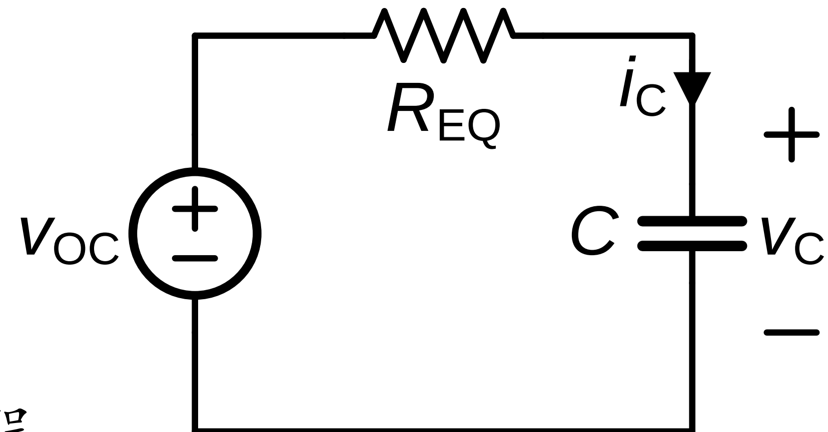
如图所示电路，$v_S(t) = \delta(t)$ V，$v_C(0_-) = 0$ V，$R_1 = 3$ kΩ，$R_2 = 6$ kΩ，$C = 2.5$ μF，试求电路的冲激响应$i_C(t)$，$i_1(t)$，$i_2(t)$和$v_C(t)$。

两种方法求解

1. 直接求冲激响应
2. 利用阶跃响应求冲激响应



1.直接求冲激响应



戴维南等效电路

$$v_{OC}(t)=\frac{R_2\delta(t)}{R_1+R_2}=\frac{2}{3}\delta(t)\ \text{V}$$

$$R_{EQ}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=2\ \text{k}\Omega,\ \tau=R_{EQ}C=5\ \text{ms}$$

根据KVL方程，得到常微分方程

$$R_{EQ}C\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=\frac{2}{3}\delta(t) \qquad \int_{0_-}^{0_+}R_{EQ}C\frac{dv_C(t)}{dt}+\int_{0_-}^{0_+}v_C(t)=\int_{0_-}^{0_+}\frac{2}{3}\delta(t)=\frac{2}{3}$$

$$R_{EQ}C\left[v_C(0_+)-v_C(0_-)\right]=\frac{2}{3},\quad v_C(0_+)=\frac{2}{3}\frac{1}{R_{EQ}C}+v_C(0_-)=\frac{400}{3}\ \text{V}$$

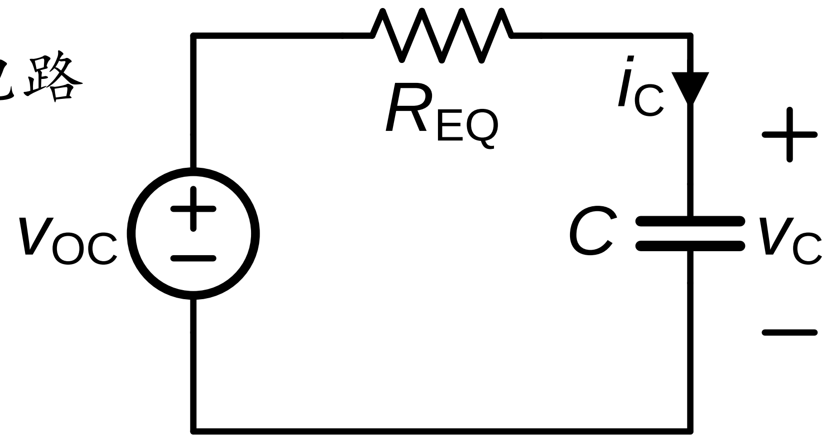
$$v_C(t)=v_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{400}{3}e^{-200t}\varepsilon(t)\ \text{V} \qquad i_2(t)=\frac{v_C(t)}{R_2}=2.22\times10^{-2}e^{-200t}\varepsilon(t)\ \text{A}$$

$$i_1(t)=\frac{\delta(t)-v_C(t)}{R_1}=\left[3.33\times10^{-4}\delta(t)-4.44\times10^{-2}e^{-200t}\varepsilon(t)\right]\ \text{A}$$

$$i_C(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}=\left[3.33\times10^{-4}\delta(t)-6.66\times10^{-2}e^{-200t}\varepsilon(t)\right]\ \text{A}$$

2.利用阶跃响应求冲激响应

$v_S(t)=\varepsilon(t)$ V时，戴维南等效电路



$$v_{OC}(t)=\frac{R_2\varepsilon(t)}{R_1+R_2}=\frac{2}{3}\varepsilon(t)\ \text{V}$$

$$R_{EQ}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=2\ \text{k}\Omega,\ \tau=R_{EQ}C=5\ \text{ms}$$

$$s_{v_C}(t)=\frac{2}{3}(1-\text{e}^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(\text{t})=\frac{2}{3}(1\text{-e}^{-200t})\varepsilon(\text{t})\ \text{V}$$

$$v_C(t)=h_{v_C}(t)=\frac{\text{d}s_{v_C}(t)}{\text{d}t}=\frac{2}{3}(1-\text{e}^{-200t})\delta(t)-\frac{2}{3}\times(-200)\text{e}^{-200t}\varepsilon(t)=\frac{400}{3}\text{e}^{-200t}\varepsilon(t)$$

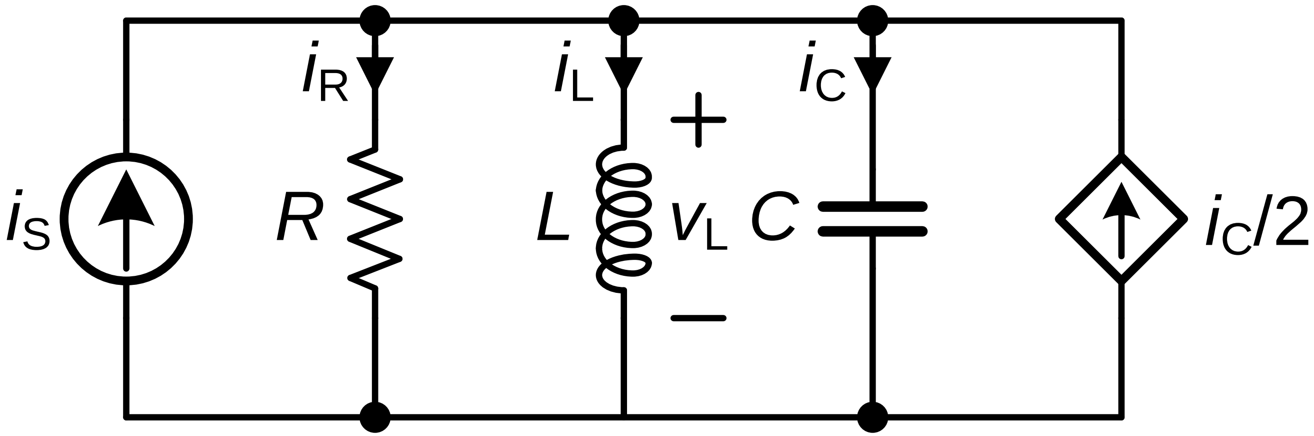
$$i_2(t)=\frac{v_C(\text{t})}{R_2}=2.22\times10^{-2}\text{e}^{-200t}\varepsilon(\text{t})\ \text{A}$$

$$i_1(t)=\frac{\delta(t)-v_C(t)}{R_1}=\left[3.33\times10^{-4}\delta(t)-4.44\times10^{-2}\text{e}^{-200t}\varepsilon(\text{t})\right]\ \text{A}$$

$$i_C(t)=C\frac{\text{d}v_C(t)}{\text{d}t}=\left[3.33\times10^{-4}\delta(t)-6.66\times10^{-2}\text{e}^{-200t}\varepsilon(\text{t})\right]\ \text{A}$$

例题15

如图所示电路，$v_C(0_-) = 0$ V，$i_L(0_-) = 0$ A，$R = 0.2$ Ω，$L = 0.25$ H，$C = 2$ F，$i_S(t) = \delta(t)$ A，试求单位冲激响应$i_L(t)$。



两种方法求解：1. 直接求冲激响应；2. 利用阶跃响应求冲激响应

1.直接求冲激响应

列KCL方程，可得常微分方程

$$-i_S(t)+i_R(t)+i_C(t)+i_L(t)-\frac{i_C(t)}{2}=0,\ \frac{LC}{2}\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=\delta(t)$$

特征根 $\frac{LC}{2}p^2+\frac{L}{R}p+1=0$ $\quad p_1=-1,\ p_2=-4$

特解 $i_L^{'}(t)=0\ \mathrm{A}$ ， 通解 $i_L^{''}(t)=A_1 e^{p_1 t}+A_2 e^{p_2 t}$

解

$$i_L(t)=i_L^{'}(t)+i_L^{''}(t)=A_1 e^{-t}+A_2 e^{-4t}$$

初始值

$$\begin{cases} i_L(0_+)=i_L(0_-)=0 \\ \left.\frac{LC}{2}\frac{di_L(t)}{dt}\right|_{0_+}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1+A_2=0 \\ -A_1-4A_2=4 \end{cases} \to \begin{cases} A_1=\frac{4}{3} \\ A_1=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

电感上的电流

$$i_L(t)=h(t)=(\frac{4}{3}e^{-t}-\frac{4}{3}e^{-4t})\varepsilon(t)\ \mathrm{A}$$

2.利用阶跃响应求冲激响应

$i_S(t) = \varepsilon(t)$ A时，单位阶跃响应

$$s(t) = (1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t})\varepsilon(t)\ \text{A}$$

单位冲激响应

$$i_L(t) = h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = (1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t})\delta(t) + (\frac{4}{3}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{-4t})\varepsilon(t) = (\frac{4}{3}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{-4t})\varepsilon(t)\ \text{A}$$

卷积积分

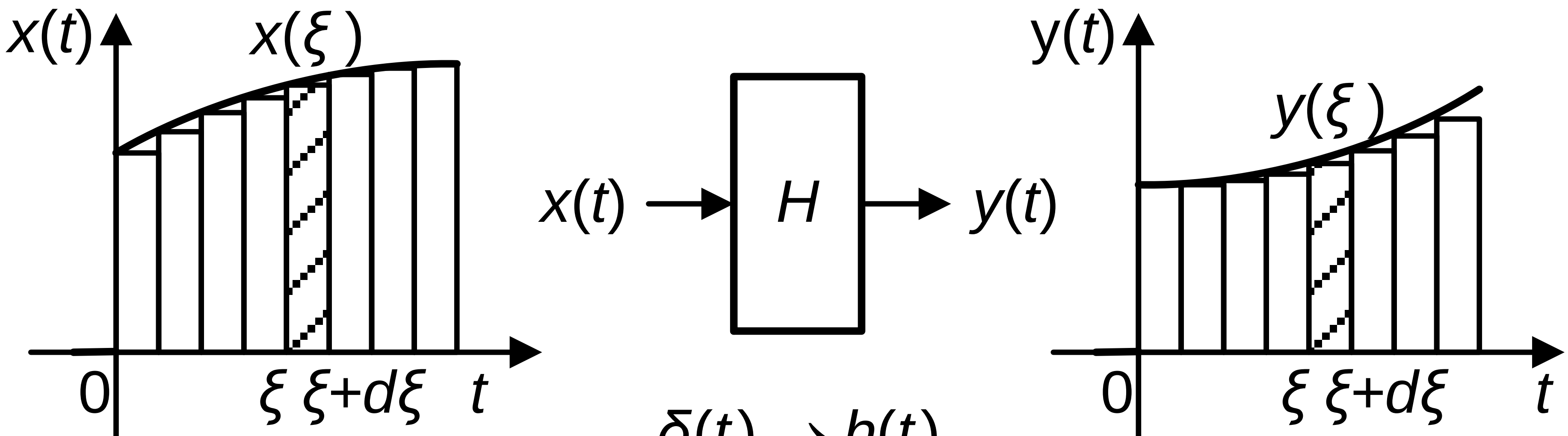
电路的单位冲激响应$h(t)$反映电路的暂态特性。

已知单位冲激响应$h(t)$，可以通过卷积积分求出任意激励$x(t)$的零状态响应$y(t)$。

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{0_-}^{t_+} x(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$= \int_{0_-}^{t_+} h(\xi)x(t-\xi)\mathrm{d}\xi = h(t) * x(t)$$

论证



$$\delta(t) \to h(t)$$

$$\mathrm{d}x(t) = x(\xi)\,\mathrm{d}\xi \times \delta(t-\xi)$$

$$\mathrm{d}y(t) = x(\xi)\,\mathrm{d}\xi \times h(t-\xi)$$

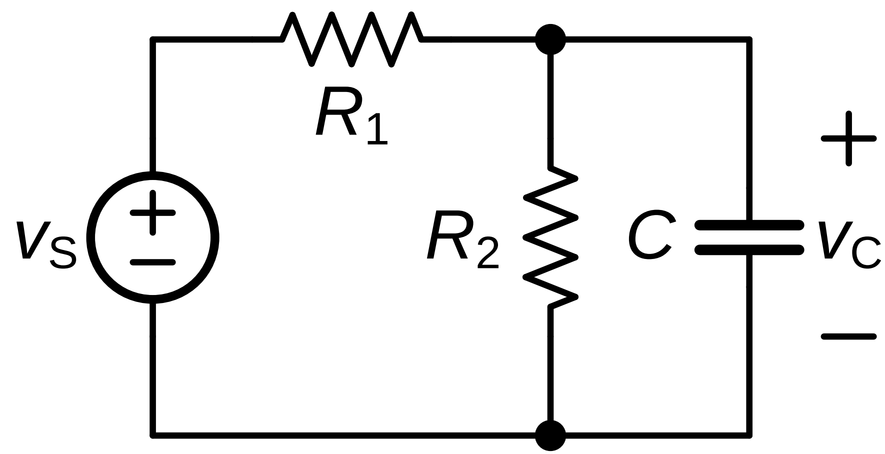
$$\mathrm{d}y(t) = x(\xi)\,\mathrm{d}\xi \times h(t-\xi)$$

$$\mathrm{y}(t) = \int_{0_-}^{t_+} \mathrm{d}y(t) = \int_{0_-}^{t_+} x(\xi) h(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi = x(t) * h(t)$$

例题16

如图所示电路，$v_S(t) = 15e^{-0.25t}\varepsilon(t)$ V，$R_1 = 40\ \Omega$，$R_2 = 40\ \Omega$，$C = 0.05$ F，试用卷积积分计算$v_C(t)$。

1. 求单位阶跃响应
2. 求单位冲激响应
3. 卷积积分求零状态响应



1. 求单位阶跃响应，令$v_S = \varepsilon(t)$，求三要素

$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = 0,\ \ v_C(\infty) = \frac{R_2}{R_1+R_2} \times 1\,V = 0.5\ \mathrm{V},\ \ \tau = (R_1 \| R_2)C = 1\ \mathrm{s}$$

$$s_{VC}(t) = v_C(t) = \left\{ v_C(\infty) + [v_C(0_+) - v_C(\infty)]\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \right\} \varepsilon(t) = 0.5(1-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$$

2. 求单位冲激响应

$$h_{VC}(t) = \frac{\mathrm{d}s_{VC}(t)}{dt} = 0.5(1-\mathrm{e}^{-t})\delta(t) + 0.5\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t) = 0.5\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

3. 卷积积分求零状态响应

$$v_C(t) = \int_{0_-}^{t_+} v_S(\xi)h(t-\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{0_-}^{t_+} 15\mathrm{e}^{-0.25\xi}\varepsilon(\xi) \times 0.5\mathrm{e}^{-t+\xi}\varepsilon(t-\xi)\mathrm{d}\xi = 7.5\mathrm{e}^{-t}\int_{0_-}^{t_+} \mathrm{e}^{0.75}\mathrm{d}\xi$$

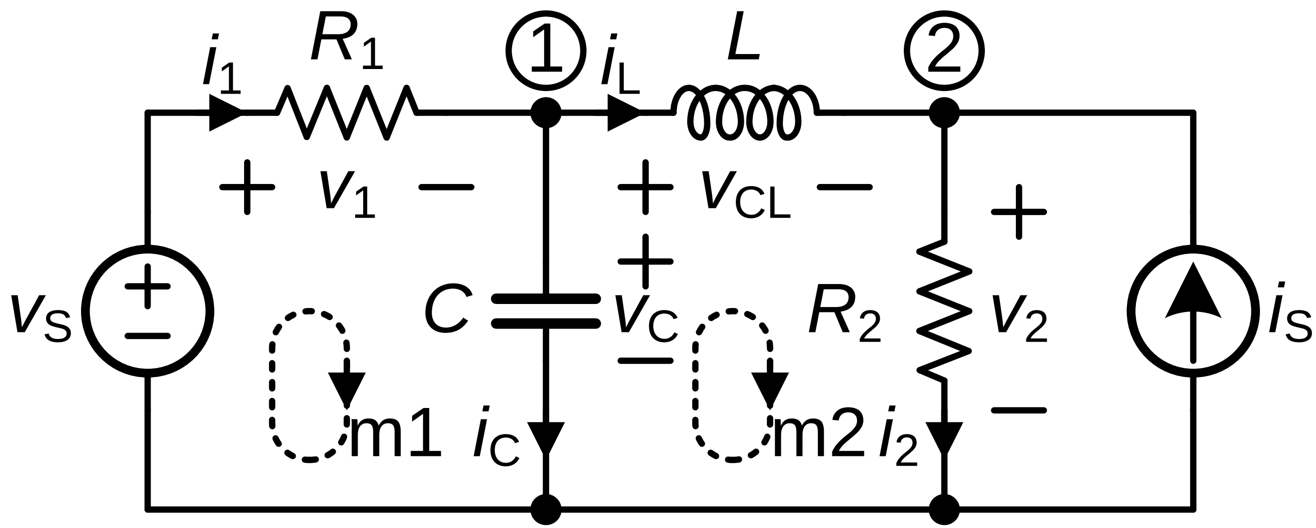
$$= 10(\mathrm{e}^{-0.25t} - \mathrm{e}^{-t})\ \mathrm{V} \quad (t \geq 0)$$

状态变量分析法

状态变量：电路中的电容电压和电感电流为电路的状态变量

状态方程：由电路状态变量及其一阶导数组成的一阶微分方程组称为电路的状态方程。

输出方程：待求电路量与状态变量和输入量之间的关系式称为输出方程。



节点1的KCL方程和回路m2的KVL方程，节点2的KCL方程和回路m1的KVL方程

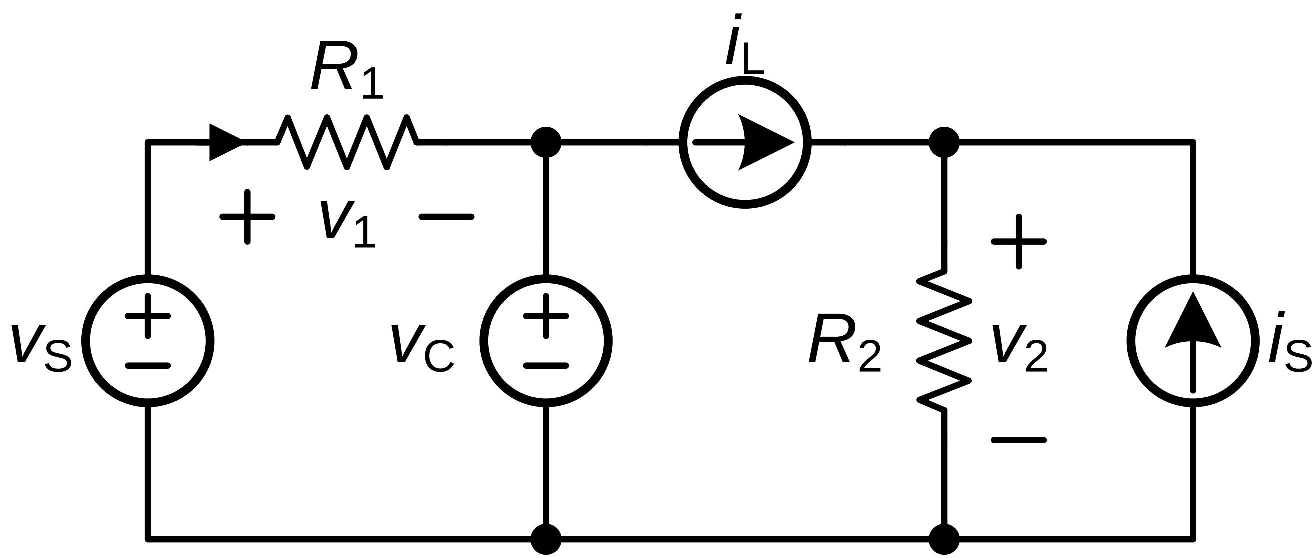
$$\begin{cases} C\dfrac{dv_C}{dt} = -i_L + i_1 \\ L\dfrac{di_L}{dt} = v_C - v_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{v_2}{R_2} = i_L + i_S \\ i_1 R_2 = v_S - v_C \end{cases}$$

取v_C和i_L为状态变量，消除其他非状态变量

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{R_1C}v_C - \dfrac{1}{C}i_L + \dfrac{1}{R_1C}v_S \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{L}v_C - \dfrac{R_2}{L}i_L - \dfrac{R_2}{L}i_S \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_C(0_+) = V_0 \\ i_L(0_+) = I_0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_1C} & 0 \\ 0 & -\dfrac{R_2}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_S \\ i_S \end{bmatrix}$$



待求变量为v_1和v_2，根据置换定理，分别用电压源和电流源置换电容和电感

$$\begin{cases} v_1 = -v_C + v_S \\ v_2 = R_2 i_L + R_2 i_S \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_S \\ i_S \end{bmatrix}$$

状态方程的标准形式

线性动态电路状态方程的标准形式

$$\dot{X} = AX + BV$$

其中状态向量 $X = [v_{C1} \quad v_{C2} \quad \ldots, \quad i_{L1} \quad i_{L2} \quad \ldots]^{T}$ $\dot{X}$ 是状态变量的一阶导数向量。

输入向量 $V = [v_{S1} \quad v_{S2} \quad \ldots \quad i_{S1} \quad i_{S2} \quad \ldots]^{T}$。$A$是$n \times n$方阵，$n$为状态变量数。$B$是$n \times m$矩阵，$m$是输入变量的个数。$A$和$B$都是由电路的结构和参数决定。

输出方程的标准形式

输出方程得标准形式

$$Y = CX + DV$$

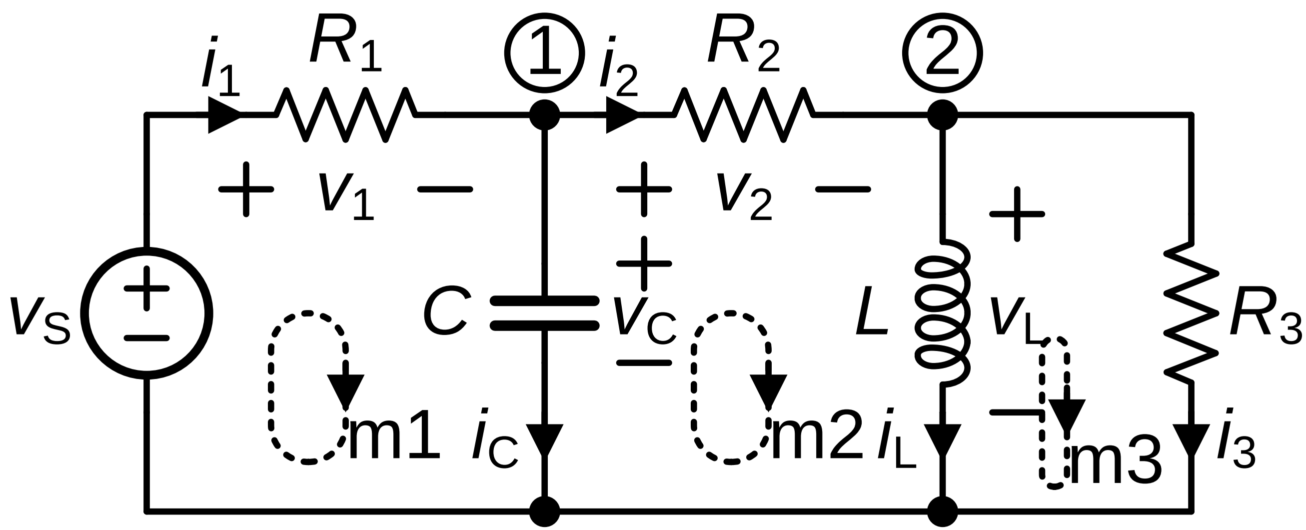
其中输出向量 $Y = [v_1 \quad v_2 \quad \ldots, i_1 \quad i_2 \quad \ldots]^{\mathrm{T}}$，$Y$有$p$个变量，C和D分别是$p \times n$和$p \times m$的矩阵，$C$和$D$都是由电路的结构和参数决定。

状态方程和输出方程的列写步骤

1. 对连接一个电容的节点列KCL方程。
2. 对包含一个电感的回路列KVL方程。
3. 列写其它节点KCL方程和其它回路KVL方程，将1和2所列的方程中的非状态变量消去。
4. 整理成标准形式的状态方程。
5. 将状态变量分别用电压源或者电流源置换，求出待求输出变量的方程，然后整理成标准形式的输出方程。

例题17

如图所示电路，列写标准形式的状态方程，并写出以i_3为输出变量的输出方程。



节点1的KCL方程和回路m3的KVL方程，节点2的KCL方程和回路m1和m2的KVL方程

$$\begin{cases} C\dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} = i_1 - i_2 \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = i_3 R_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} i_2 = i_{\mathrm{L}} + i_3 \\ i_1 R_1 = v_S - v_{\mathrm{C}} \\ i_2 R_2 = v_{\mathrm{C}} - L\dfrac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C\dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} = -\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2+R_3}\right)v_{\mathrm{C}} - \dfrac{R_3}{R_2+R_3}i_{\mathrm{L}} + \dfrac{v_{\mathrm{S}}}{R_1} \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{R_3}{R_2+R_3}v_{\mathrm{C}} - \dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3}i_{\mathrm{L}} \end{cases}$$

$$i_3 = \frac{1}{R_3} L \frac{\mathrm{d}i_\mathrm{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R_2 + R_3} v_\mathrm{C} - \frac{R_2}{R_2 + R_3} i_\mathrm{L}$$

标准形式的状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_\mathrm{C} \\ \dot{i}_\mathrm{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}\right) & -\frac{1}{C}\frac{R_3}{R_2 + R_3} \\ \frac{1}{L}\frac{R_3}{R_2 + R_3} & -\frac{1}{L}\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\mathrm{C} \\ i_\mathrm{L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{CR_1} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\mathrm{S} \end{bmatrix}$$

标准形式的输出方程

$$\begin{bmatrix} i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2 + R_3} & -\frac{R_2}{R_2 + R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_\mathrm{C} \\ i_\mathrm{L} \end{bmatrix}$$