电路基础
(Fundamentals of Electric Circuits, INF0120002.07)

2019年04月11日

唐长文 教授

zwtang@fudan.edu.cn

http://rfic.fudan.edu.cn/Courses.htm

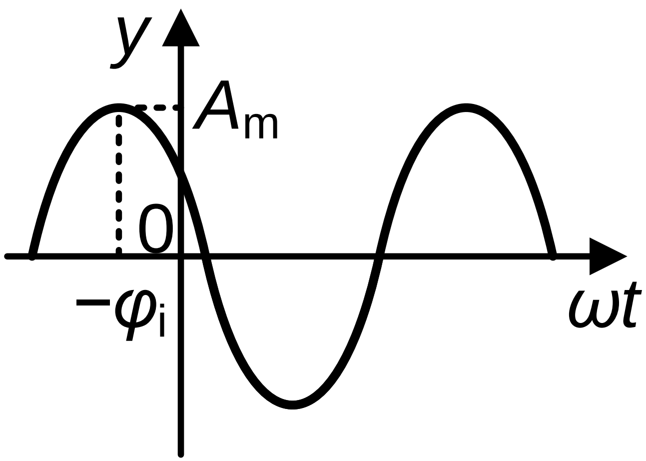
复旦大学/微电子学院/射频集成电路设计研究小组

第六章 正弦交流电路

- 正弦量的相量表示法
- 电路定理的相量形式
- 电路元件的相量形式
- 阻抗和导纳
- 正弦交流电路的相量分析法
- 正弦交流电路的功率
- 复功率
- 最大功率传输定理

正弦量的相量表示法

- 正弦量：泛指所有随时间按正弦变化的电路变量
- 瞬时值：电路变量在瞬间的量值
- 正弦量的三要素
  - 振幅(或幅值)A_m
  - 初相φ_i
  - 角频率ω(或频率f)，



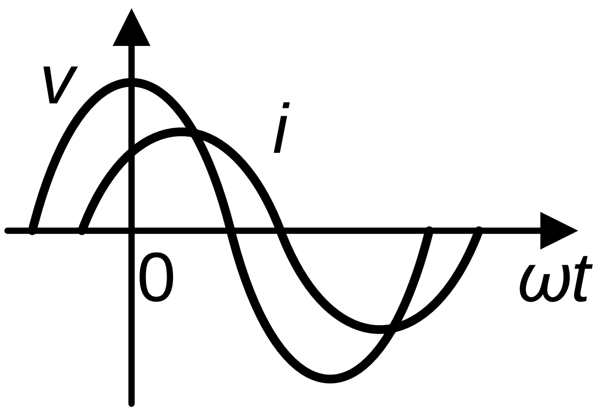
相位(或相角)φ，周期T

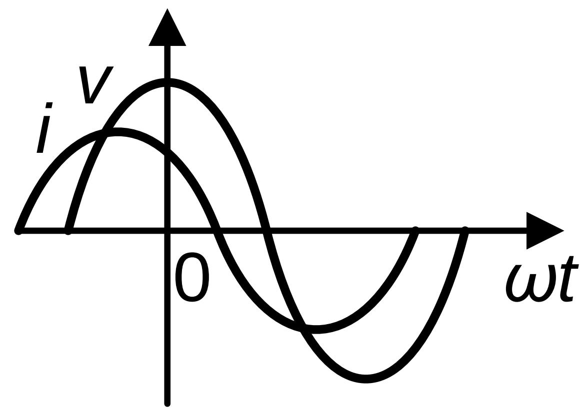
$$y = A_m\cos(\omega t + \varphi_i)$$

相位差

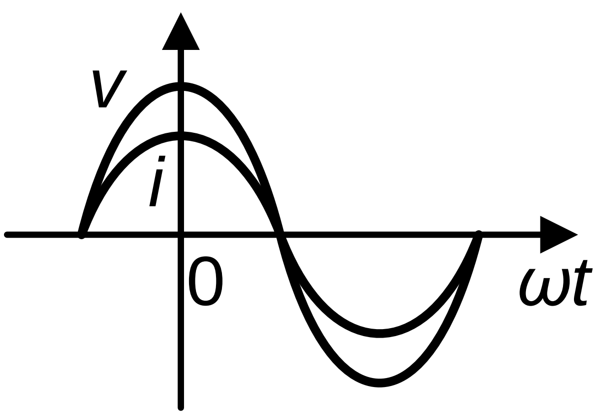
两个同频正弦量的相位差就等于它们的初相位差。

v超前i

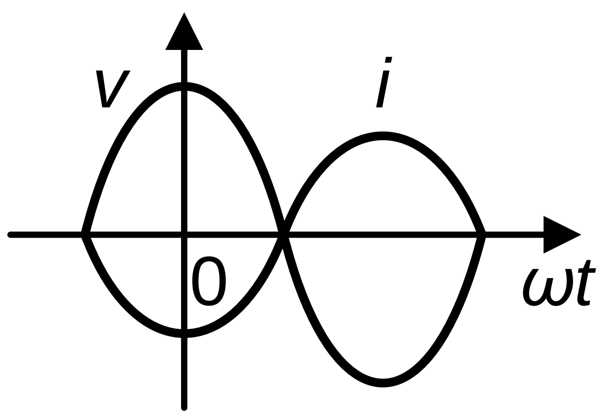




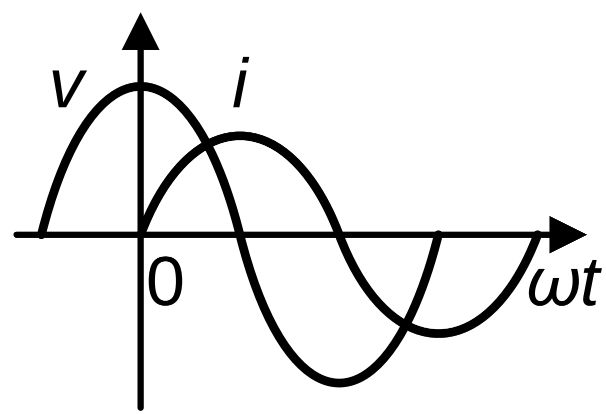
v滞后i



同相



反相

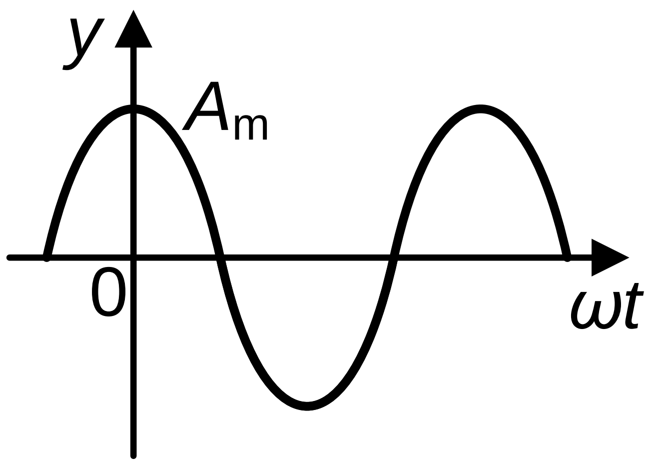


正交

参考正弦量

初始相位为零的正弦量定义为参考正弦量。

$$y = A_{\mathrm{m}} \cos(\omega t)$$



有效值

设周期电压$v = f(t)$与直流V分别作用相同的电阻，若两者做功的平均效果相同，则将此直流值V的量值规定为周期电压v的有效值。

$$W = W', \quad \int_0^T \mathrm{d}W = \frac{V^2}{R}T, \quad \int_0^T \frac{v^2}{R}dt = \frac{V^2}{R}T,$$

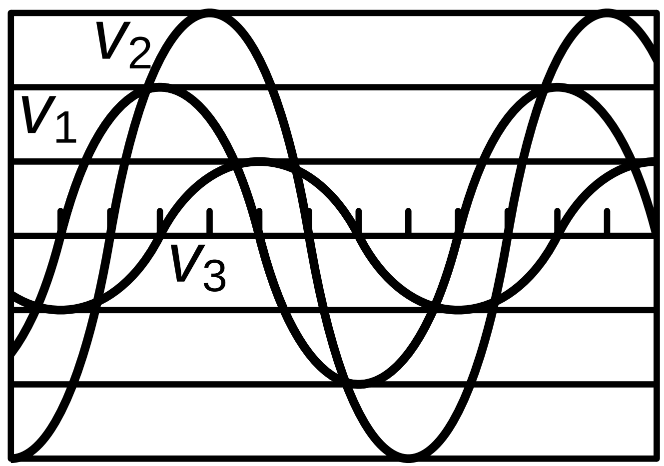
$$V = \sqrt{\frac{\int_0^T v^2 dt}{T}}$$

正弦电压的有效值(也称方均根值)：

$$V = \sqrt{\frac{\int_0^T [V_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{i})]^2 dt}{T}} = \frac{V_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}$$

例题1

如图所示，已知信号频率为50 Hz，纵坐标每格表示10 V。请写出各电压的瞬时表达式。



v_1为参考相量 $v_1 = 20\cos(100\pi t)$ V

$v_2 = 30\cos(100\pi t - \pi/4)$ V $v_3 = 10\cos(100\pi t - \pi/2)$ V

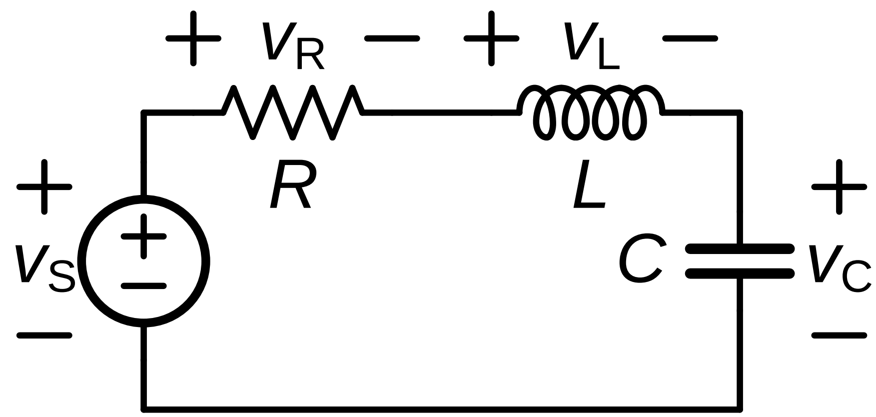
例题2

如图所示电路，电阻R = 1 Ω，电感L = 1 H，电容C = 1 F，电压源v_S = cos(t)，试计算电压v_R，v_L和v_C。

KVL方程

$$v_R + v_L + v_C = v_S$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt = \cos(t)$$



假设 $i = I_m \cos(t + \varphi_i)$

$$I_m = 1, \ \varphi_i = 0, \ v_R = \cos(t), \ v_L = -\sin(t) = \cos(t + \pi/2)$$

$$v_C = \sin(t) = \cos(t - \pi/2)$$

利用欧拉公式求解

根据欧拉公式 $V_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})=V_{\mathrm{m}}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})}}{2}$

RLC串联电路 $Ri+L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{C}\int i\mathrm{d}t=v_{\mathrm{S}}$

$$v_{\mathrm{S}}=V_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})}}{2},\quad i=I_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}}{2}$$

$$RI_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}}{2}+I_{\mathrm{m}}\mathrm{j}\omega L\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}}{2}+\frac{I_{\mathrm{m}}}{\mathrm{j}\omega C}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}}{2}=V_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})}}{2}$$

$$(RI_{\mathrm{m}}+I_{\mathrm{m}}\mathrm{j}\omega L+\frac{I_{\mathrm{m}}}{\mathrm{j}\omega C})\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}=V_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})}$$

$$(RI_{\mathrm{m}}-I_{\mathrm{m}}\mathrm{j}\omega L-\frac{I_{\mathrm{m}}}{\mathrm{j}\omega C})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}=V_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t+\varphi_{\mathrm{i}})}$$

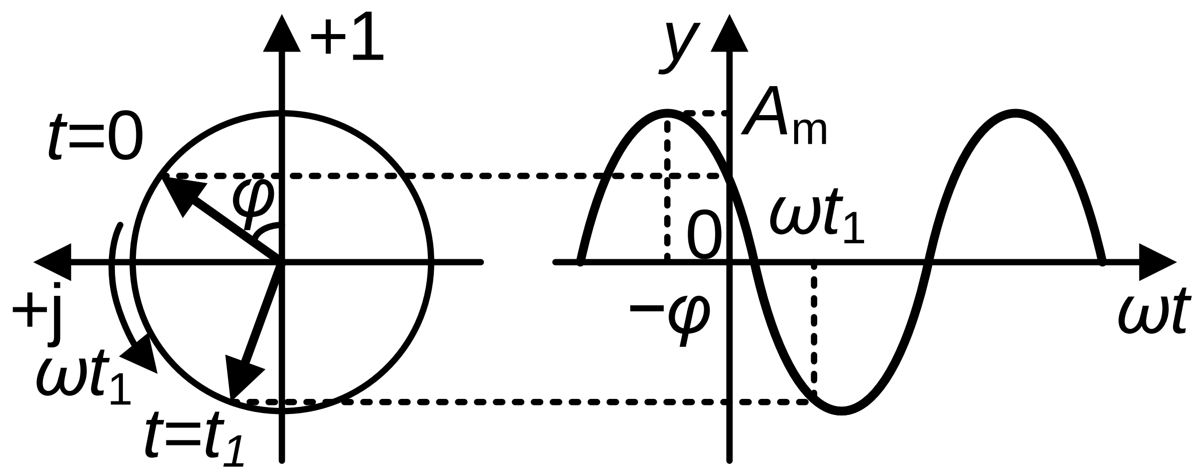
$$I_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}=\frac{V_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{i}}}}{(R+\mathrm{j}\omega L+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C})}$$

正弦量的相量变换

相量变换 $\dot{A}_{\mathrm{m}}=P[A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)]=A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}=A_{\mathrm{m}}\angle\varphi$

相量反变换 $f(t)=P^{-1}[A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}]=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)$

正弦量与相量的关系



$$A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)=P^{-1}(A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi})=\mathrm{Re}(\dot{A}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})=(\dot{A}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+\dot{A}_{\mathrm{m}}^{*}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t})/2$$

相量变换的性质

- 线性叠加性

$$P[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 P[f_1(t)] + a_2 P[f_2(t)]$$

$$P^{-1}[a_1 \dot{A}_{\mathrm{m1}} + a_2 \dot{A}_{\mathrm{m2}}] = a_1 P^{-1}[\dot{A}_{\mathrm{m1}}] + a_2 P[\dot{A}_{\mathrm{m1}}]$$

- 微分性

$$P[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}] = \mathrm{j}\omega P[f(t)] = \mathrm{j}\omega \dot{A}_{\mathrm{m}}$$

- 积分性

$$P[\int f(t)\mathrm{d}t] = \frac{P[f(t)]}{\mathrm{j}\omega} = \frac{\dot{A}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{j}\omega}$$

例题3

写出i_1 = 2cos(ωt) A，i_2 = 4cos(ωt − 120º) A，i_3 = −4cos(ωt − 60º) A和i_4 = 2sin(ωt + 45º) A的相量。

$$\dot{i}_1 = P[2\cos(\omega t)] = 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}0} = 2\angle 0^\circ\ \mathrm{A} = 2\ \mathrm{A}$$

$$\dot{i}_2 = P[4\cos(\omega t - 120^\circ)] = 4\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-2\pi/3)} = 4\angle -120^\circ\ \mathrm{A}$$

$$= 4(-1/2 - \mathrm{j}\sqrt{3}/2) = (-2 - \mathrm{j}2\sqrt{3})\ \mathrm{A}$$

$$\dot{i}_3 = P[-4\cos(\omega t - 60^\circ)] = P[4\cos(\omega t - 60^\circ + 180^\circ)]$$

$$= 4\mathrm{e}^{\mathrm{j}(2\pi/3)} = 4\angle 120^\circ\ \mathrm{A}$$

$$= 4(-1/2 + \mathrm{j}\sqrt{3}/2) = (-2 + \mathrm{j}2\sqrt{3})\ \mathrm{A}$$

$$\dot{i}_4 = P[2\sin(\omega t + 45^\circ)] = P[2\cos(\omega t + 45^\circ - 90^\circ)]$$

$$= 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(-\pi/4)} = 4\angle -45^\circ\ \mathrm{A}$$

$$= 2(\sqrt{2}/2 - \mathrm{j}\sqrt{2}/2) = (\sqrt{2} - \mathrm{j}\sqrt{2})\ \mathrm{A}$$

例题4

已知电压相量 $\dot{V}_{m1}=(4-\text{j}3)\ \text{V}$，$\dot{V}_{m2}=(-4-\text{j}3)\ \text{V}$ 和 $\dot{V}_{m3}=-\text{j}3\ \text{V}$。角频率$\omega = 1$，写出各电压相量所代表的正弦量。

$$v_1=P^{-1}[4-\text{j}3]=P^{-1}[5\angle-\arctan(3/4)]=P^{-1}[5\angle-36.9^\circ]$$
$$=5\cos(t-36.9^\circ)\ \text{V}$$
$$v_2=P^{-1}[-4-\text{j}3]=P^{-1}[5\angle(-180^\circ+\arctan(3/4))]=P^{-1}[5\angle-153.1^\circ]$$
$$=5\cos(t-153.1^\circ)\ \text{V}$$
$$v_3=P^{-1}[-\text{j}3]=P^{-1}[3\angle-90^\circ]=3\cos(t-90^\circ)\ \text{V}$$

电路定理的相量形式

- 基尔霍夫电流定律：在正弦交流电路中，流出节点的各支路电流相量的代数和等于零。

$$\sum \dot{I}_{\mathrm{k}} = 0$$

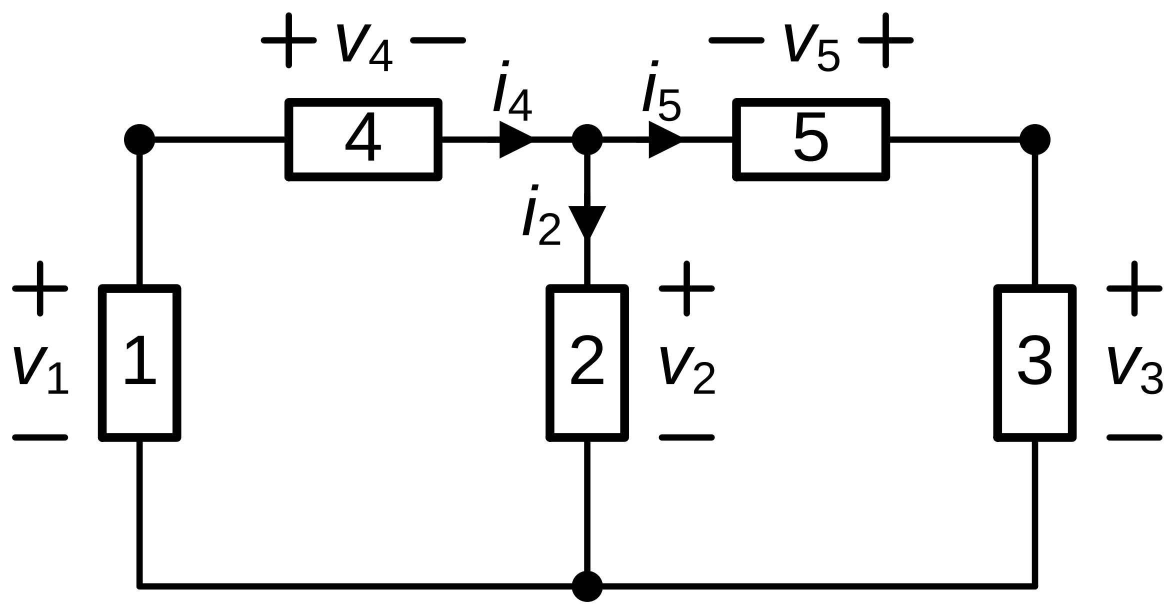
- 基尔霍夫电压定律：在正弦交流电路中，沿任一回路各支路电压相量的代数和等于零。

$$\sum \dot{V}_{\mathrm{k}} = 0$$

- 支路电流法
- 节点电压法
- 置换定理
- 叠加定理
- 等效电源定理
- 特勒根定理
- 互易定理
- 对偶原理

例题5

如图所示，$v_3 = 4\cos(\omega t + 30^o)$ V，$v_5 = 2\cos(\omega t - 60^o)$ V，$i_4 = 2\cos(\omega t - 120^o)$ A，$i_5 = 2\cos(\omega t + 180^o)$ A，求电压v_2和电流i_2。

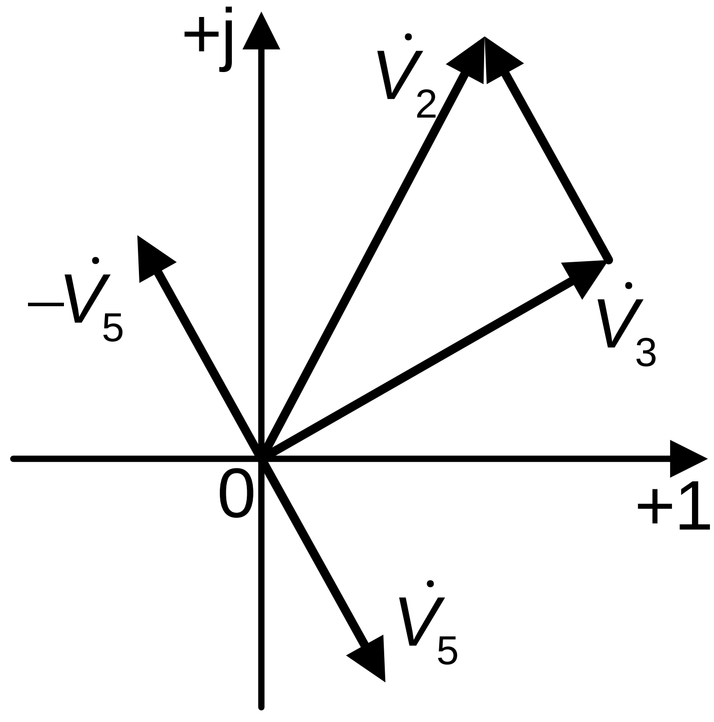


根据KVL，$-\dot{V}_2-\dot{V}_5+\dot{V}_3=0$

$$\dot{V}_2=-\dot{V}_5+\dot{V}_3=-2\angle-60^\circ+4\angle30^\circ=-2(1/2-\mathrm{j}\sqrt{3}/2)+4(\sqrt{3}/2+\mathrm{j}1/2)$$
$$=(2\sqrt{3}-1)+\mathrm{j}(\sqrt{3}+2)$$
$$=2\sqrt{5}\angle\arctan(\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1})$$
$$=2\sqrt{5}\angle56.6^\circ$$

$$v_2=2\sqrt{5}\cos(\omega t+56.6^\circ)\ \mathrm{V}$$

相量图解法

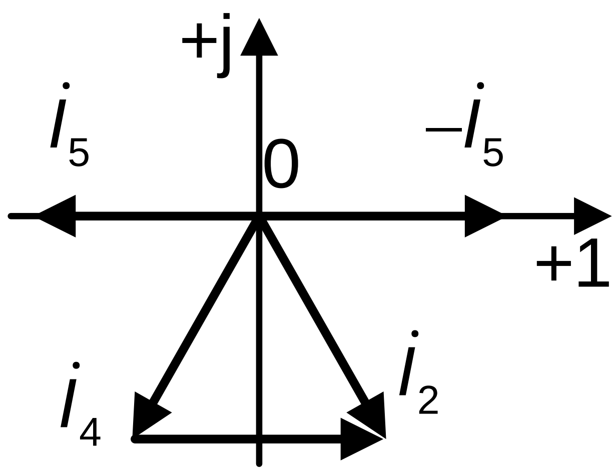


根据KCL，$\dot{I}_2+\dot{I}_5-\dot{I}_4=0$

$$\dot{I}_2=\dot{I}_4-\dot{I}_5=2\angle-120^\circ-2\angle180^\circ=2(-1/2-\mathrm{j}\sqrt{3}/2)+2$$
$$=2(1/2-\mathrm{j}\sqrt{3}/2)=2\angle-60^\circ$$

$$i_2=2\cos(\omega t-60^\circ)\ \mathrm{V}$$

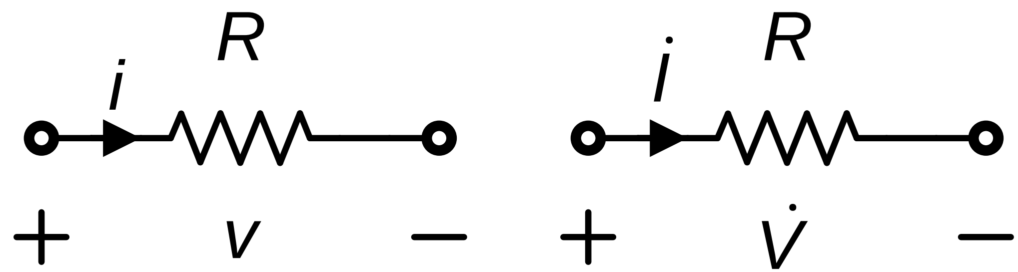
相量图解法



电路元件的相量形式

- 电阻
- 电容
- 电感
- 电压源
- 电流源
- 受控源
- 耦合电感
- 理想变压器

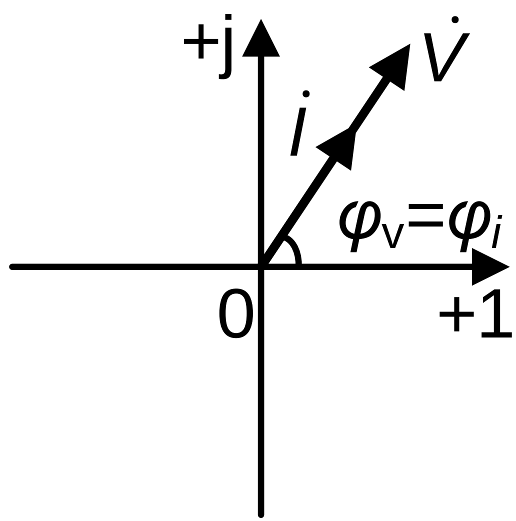
电阻元件

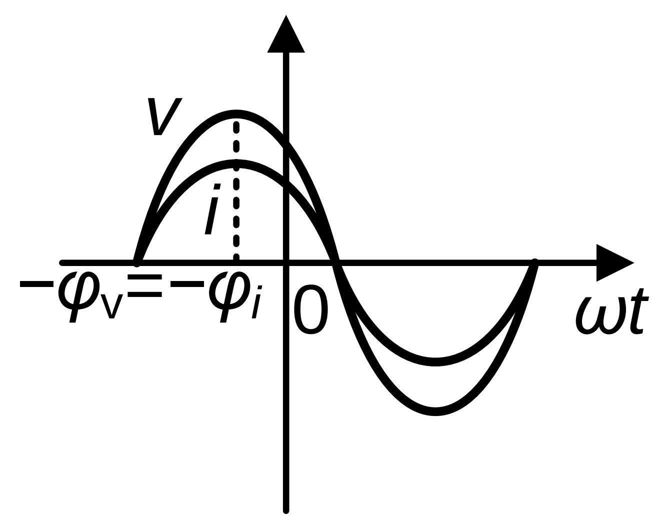


- 相量模型
- 伏安特性

$$v = Ri,\ \dot{V}_{\mathrm{m}} = R\dot{I}_{\mathrm{m}},\ V_{\mathrm{m}}\angle\varphi_{\mathrm{v}} = RI_{\mathrm{m}}\angle\varphi_{\mathrm{i}},\ V_{\mathrm{m}} = RI_{\mathrm{m}},\ \varphi_{\mathrm{v}} = \varphi_{\mathrm{i}}$$

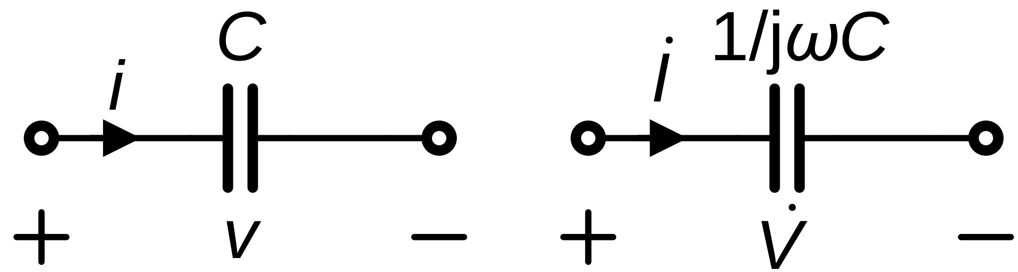
- 相量图和波形图





电容元件

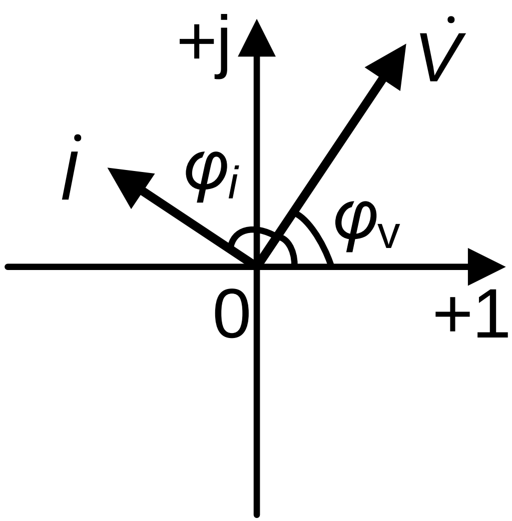
- 相量模型
- 伏安特性

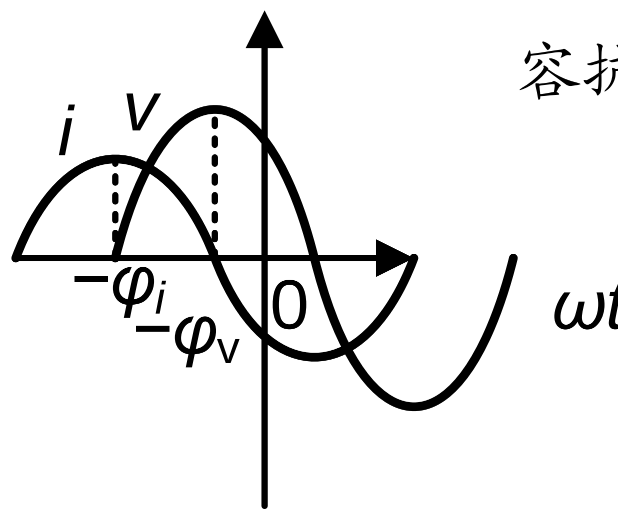


$$v=\frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t,\ \dot{V}_{\mathrm{m}}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_{\mathrm{m}},\ V_{\mathrm{m}}\angle\varphi_{\mathrm{v}}=\frac{1}{\omega C}I_{\mathrm{m}}\angle\varphi_{\mathrm{i}}-90°,$$

- 相量图和波形图

$$V_{\mathrm{m}}=\frac{1}{\omega C}I_{\mathrm{m}},\ \varphi_{\mathrm{v}}=\varphi_{\mathrm{i}}-90°$$

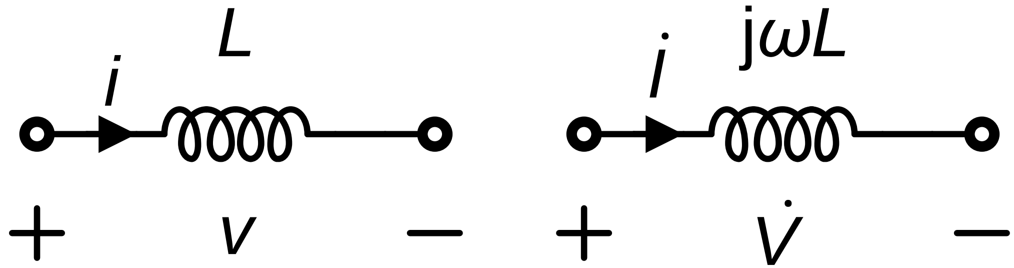




容抗：$1/\omega C$

电感元件

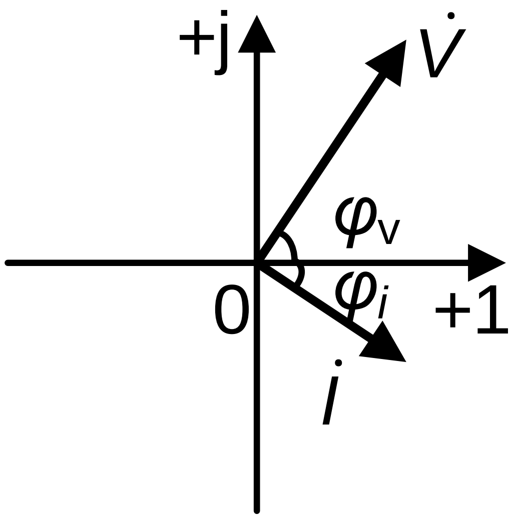
- 相量模型
- 伏安特性



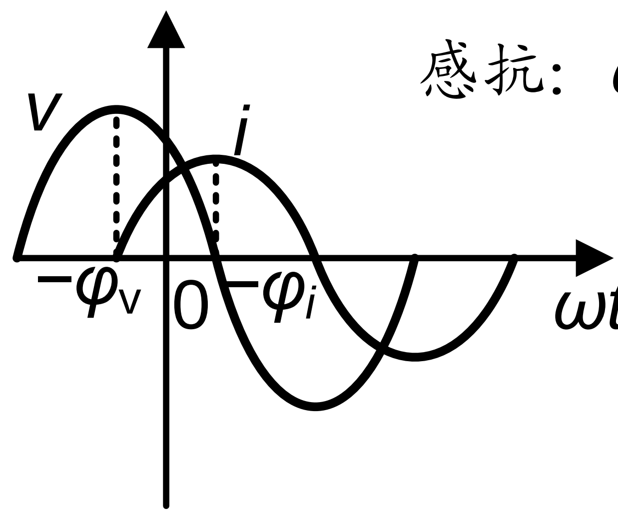
$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},\ \dot{V}_{\mathrm{m}} = \mathrm{j}\omega L\dot{I}_{\mathrm{m}},\ V_{\mathrm{m}}\angle\varphi_{\mathrm{v}} = \omega L I_{\mathrm{m}}\angle\varphi_{\mathrm{i}} + 90^{\circ},$$

- 相量图和波形图

$$V_{\mathrm{m}} = \omega L I_{\mathrm{m}},\ \varphi_{\mathrm{v}} = \varphi_{\mathrm{i}} + 90^{\circ}$$

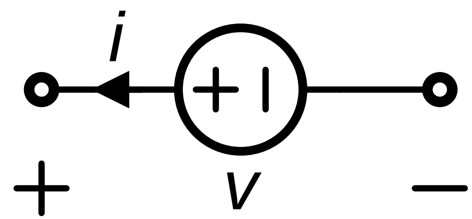


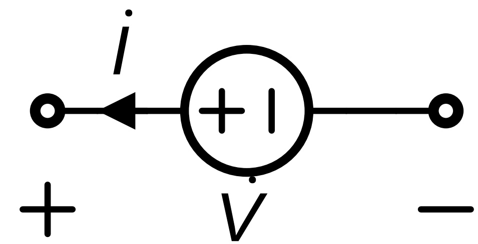
感抗：ωL



电压源

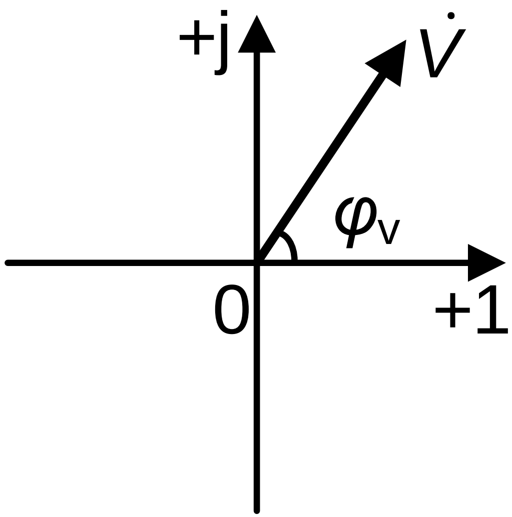
- 相量模型
- 伏安特性

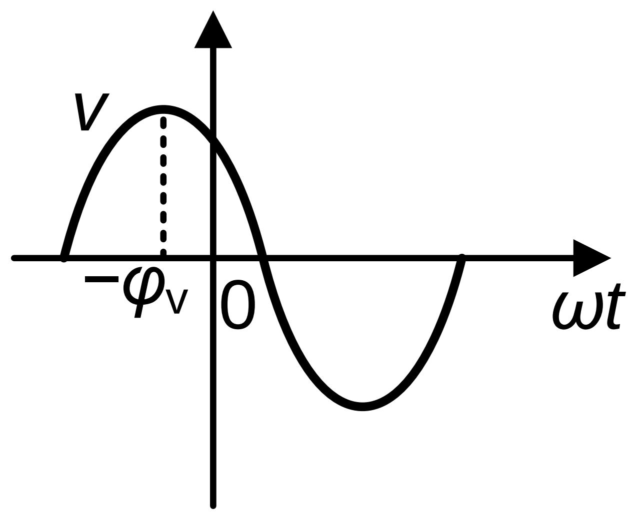




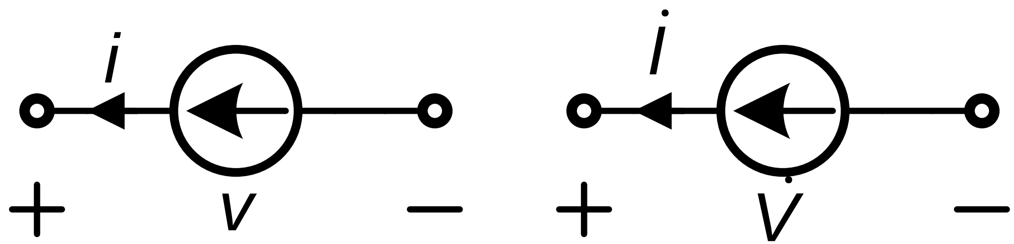
电压相量 $\dot{V}_{\mathrm{m}} = V_{\mathrm{m}}\angle\varphi_{\mathrm{v}}$，电流相量任意。

- 相量图和波形图





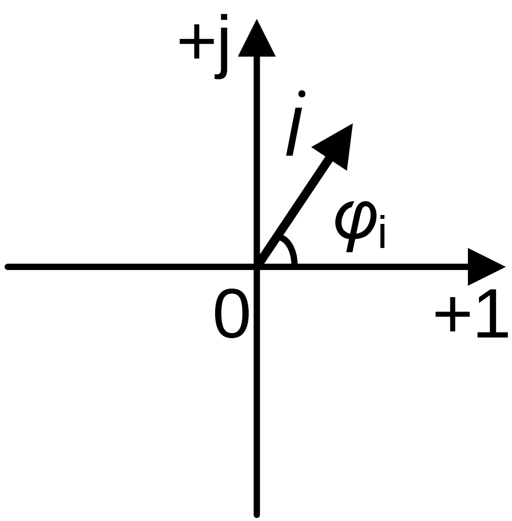
电流源

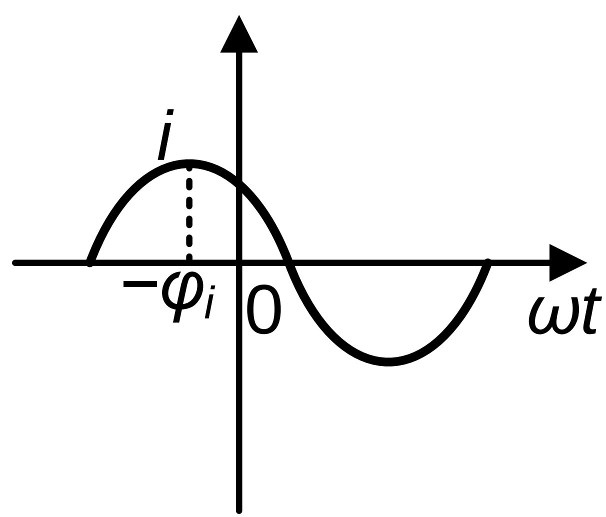


- 相量模型
- 伏安特性

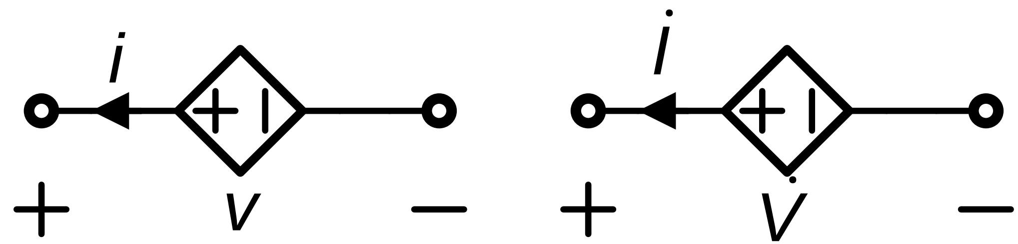
电流相量 $\dot{I}_m = I_m\angle\varphi_i$ ，电压相量任意。

- 相量图和波形图





受控电压源

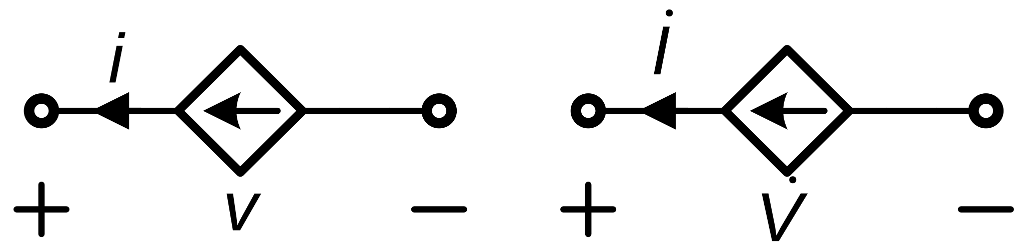


- 相量模型
- 伏安特性
  - 电压控制电压源，$v=\alpha v_1$, $\dot{V}_m=\alpha\dot{V}_{m1}$,
  - 电流控制电压源，$v=zi_1$, $\dot{V}_m=z\dot{I}_{m1}$,

受控电压源的电流任意。

v_1和i_1分别表示控制电压和控制电流，控制系数α是无量纲量，控制系数z的量纲是阻抗。

受控电流源



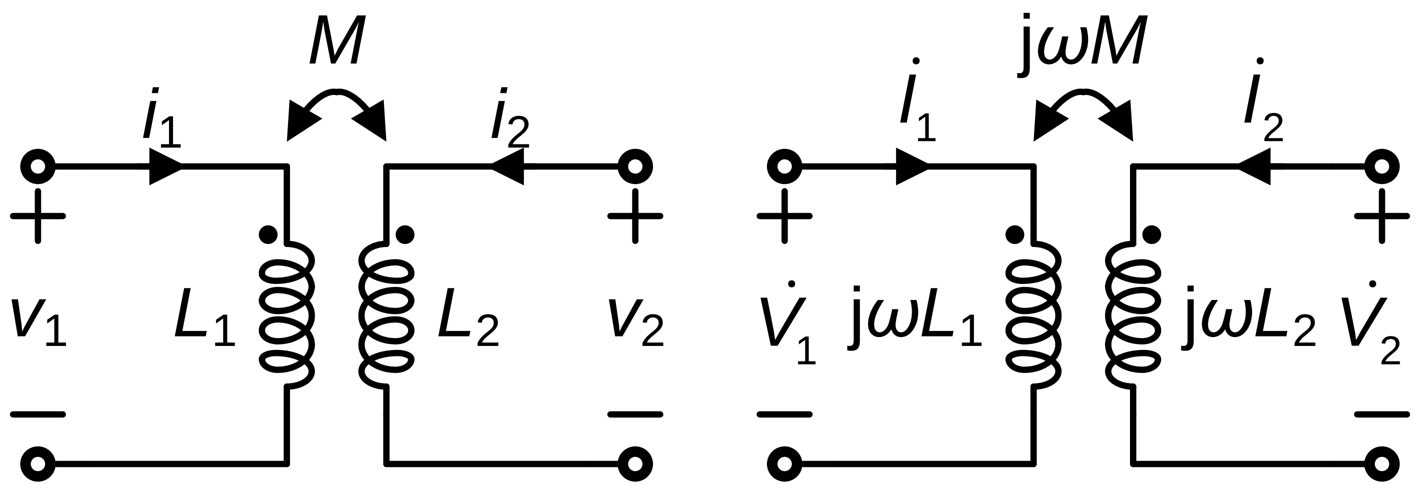
- 相量模型
- 伏安特性
  - 电压控制电流源， $i = yv_1$, $\dot{I}_m = y\dot{V}_{m1}$,
  - 电流控制电流源， $i = \beta i_1$, $\dot{I}_m = \beta \dot{I}_{m1}$,

受控电流源的电压任意。

v_1和i_1分别表示控制电压和控制电流，控制系数β是无量纲量，控制系数y的量纲是跨导。

耦合电感

- 相量模型



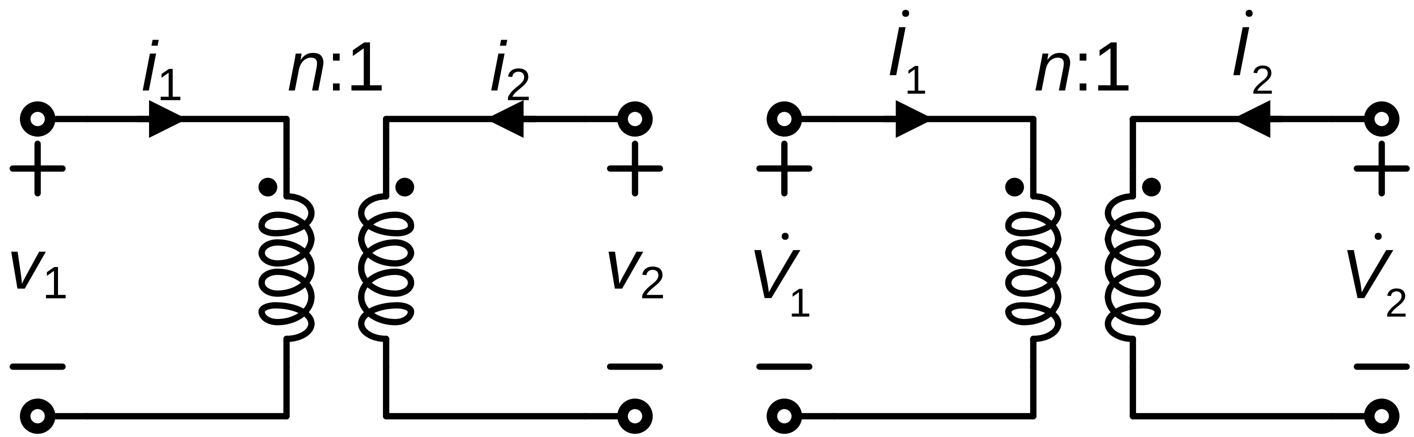
- 伏安特性

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ v_2 = M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \end{cases}$$

理想变压器

- 相量模型



- 伏安特性

$$\begin{cases} v_1 = n v_2 \\ i_1 = -\dfrac{i_2}{n} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{V}_1 = n \dot{V}_2 \\ \dot{I}_1 = -\dfrac{\dot{I}_2}{n} \end{cases}$$

例题6

如图所示中的仪表为交流电流表，其指示的读数为有效值。表A1的读数为1 A，表A2的读数为2 A,表A3的读数为3 A。求表A和表A4的读数。

有效值相量形式

参考相量 $\dot{V}_S = V_S\angle 0°$

$\dot{I}_1 = 1\angle 0°\ \text{A}$

$\dot{I}_2 = 2\angle 90°\ \text{A}$

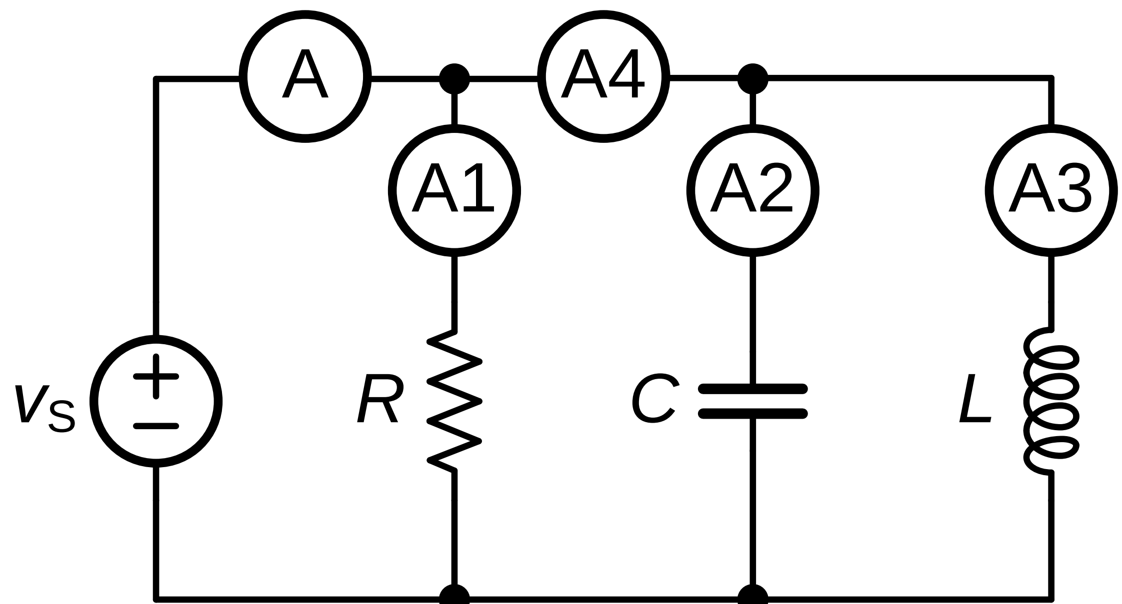
$\dot{I}_3 = 3\angle -90°\ \text{A}$

$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 1 + 2\text{j} - 3\text{j}$

$= 1 - \text{j} = \sqrt{2}\angle -45°\ \text{A}$

$\dot{I}_4 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 2\text{j} - 3\text{j}$

$= -\text{j} = 1\angle -90°$



表A读数为1.414 A，表A4的读数为1 A。

例题7

如图所示电路，电阻R = 1 Ω，电感L = 1 H，电容C = 1 F，电压源v_S = cos(t)，试计算电压v_R，v_L和v_C。

KVL方程

$$\dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C = \dot{V}_S$$

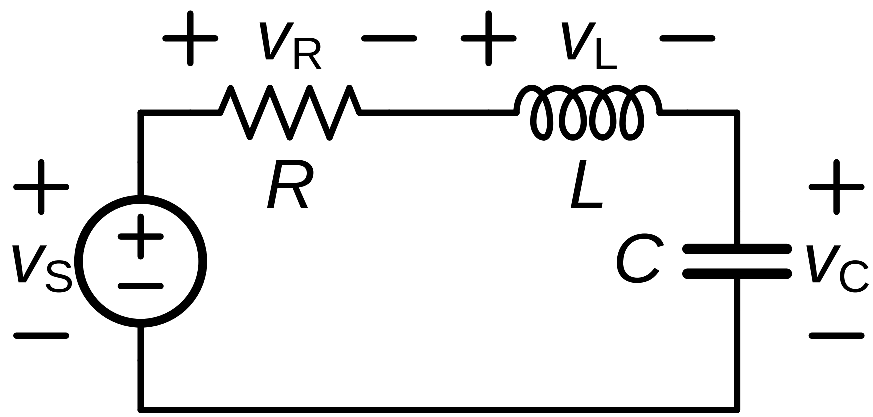
$$R\dot{I} + \mathrm{j}\omega L\dot{I} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I} = 1\angle 0^\circ$$

$$\dot{I} = 1\angle 0^\circ$$

$$\dot{V}_R = R\dot{I} = 1\angle 0^\circ = \cos(t)$$

$$\dot{V}_L = \mathrm{j}\omega L\dot{I} = 1\angle 90^\circ = \cos(t + 90^\circ)$$

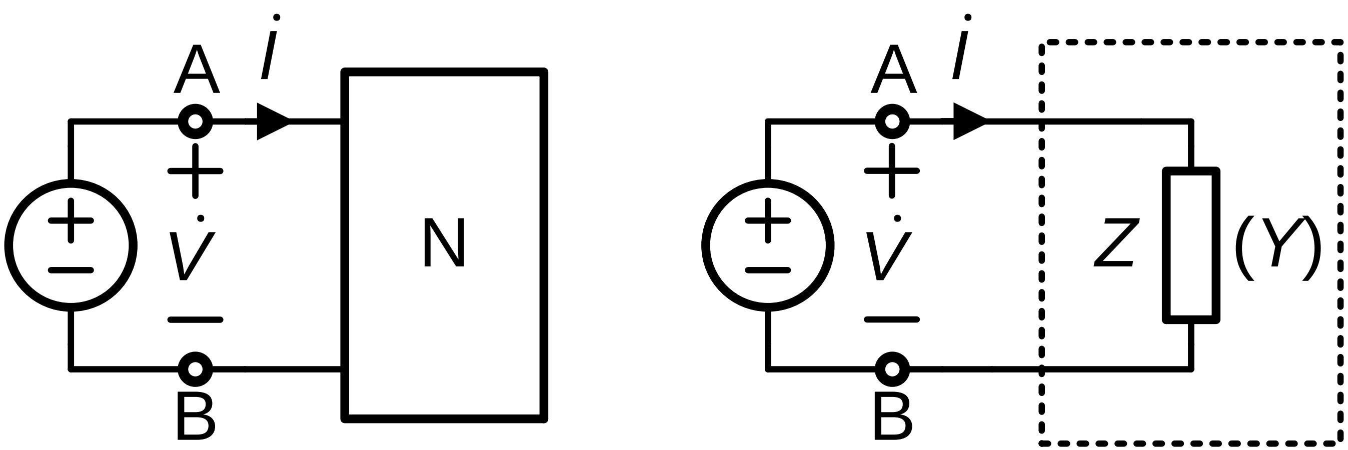
$$\dot{V}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I} = 1\angle -90^\circ = \cos(t - 90^\circ)$$



阻抗和导纳

等效原理

一个不含独立源的一端口电路N, 其端口特性可以等效为一个阻抗或者导纳。

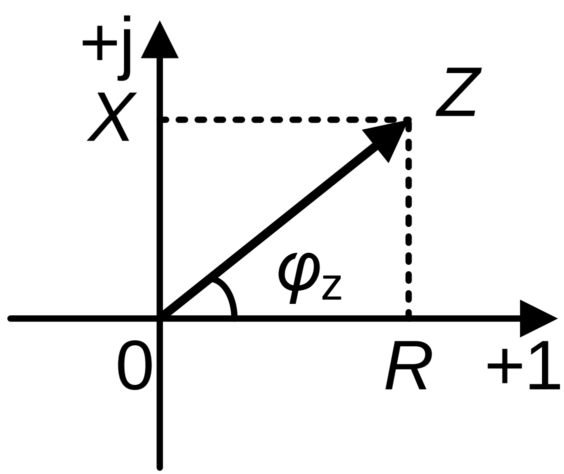


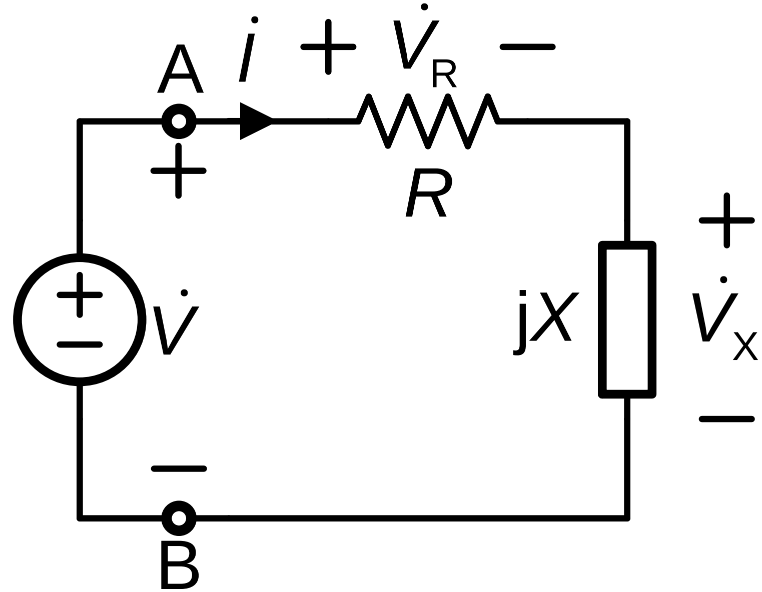
阻抗

一端口电路N的端口电压相量与电流相量的比值定义为一端口电路N的(复)阻抗。

$$Z=\frac{\dot{V}}{\dot{I}}=\frac{V}{I}\angle(\varphi_{\mathrm{v}}-\varphi_{\mathrm{i}})=|Z|\angle\varphi_{\mathrm{z}}=R+\mathrm{j}X$$

其中R为等效电阻分量，X为等效电抗分量。



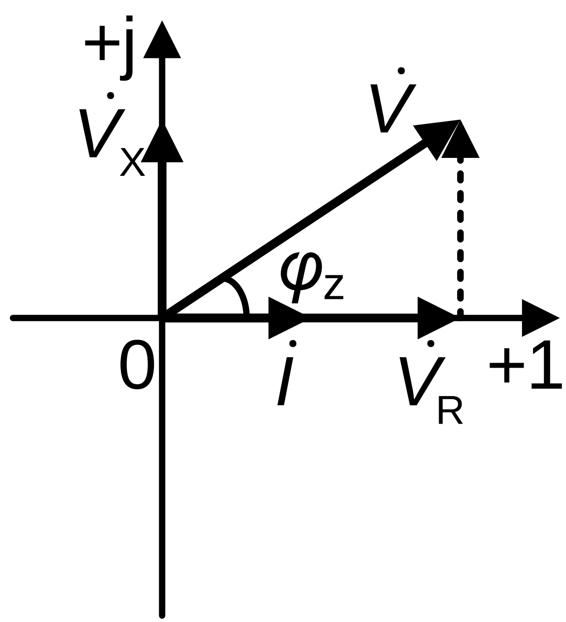


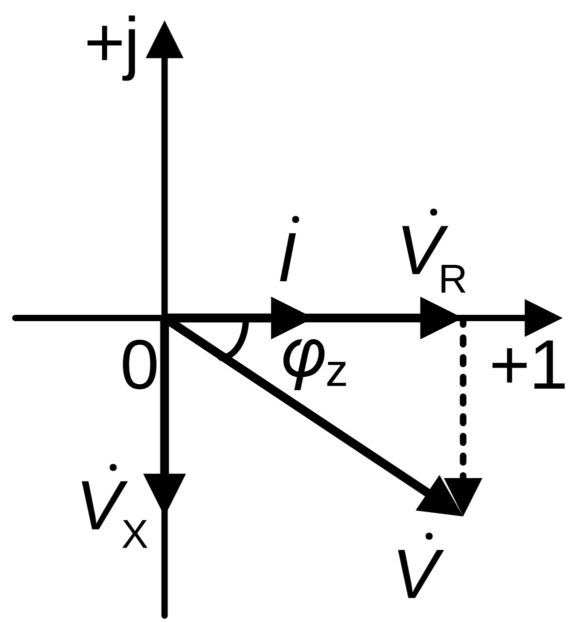
感性阻抗和容性阻抗

$X>0$时Z称为感性阻抗，等效电感 $\omega L_{eq}=X$，$L_{eq}=\dfrac{X}{\omega}$

$X<0$时Z称为容性阻抗，等效电容$\dfrac{1}{\omega C_{eq}}=|X|$, $C_{eq}=\dfrac{1}{\omega|X|}$

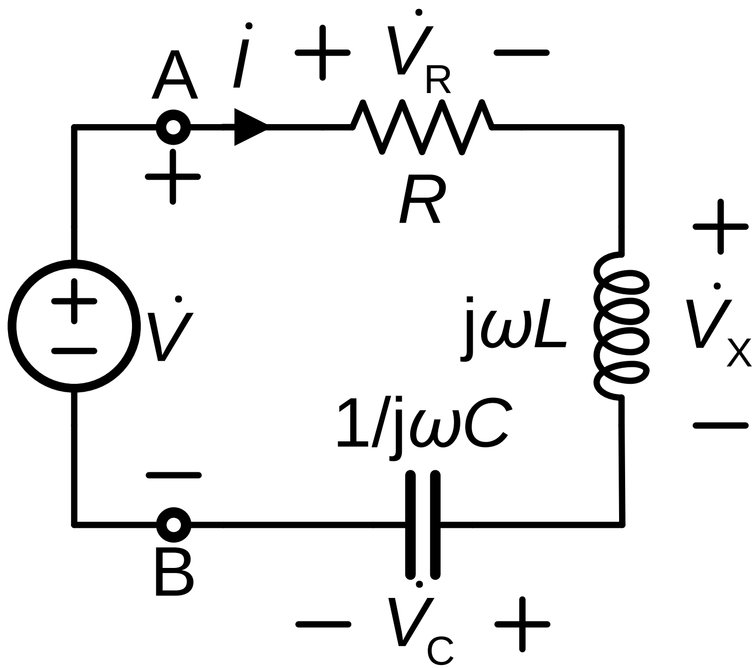
感性

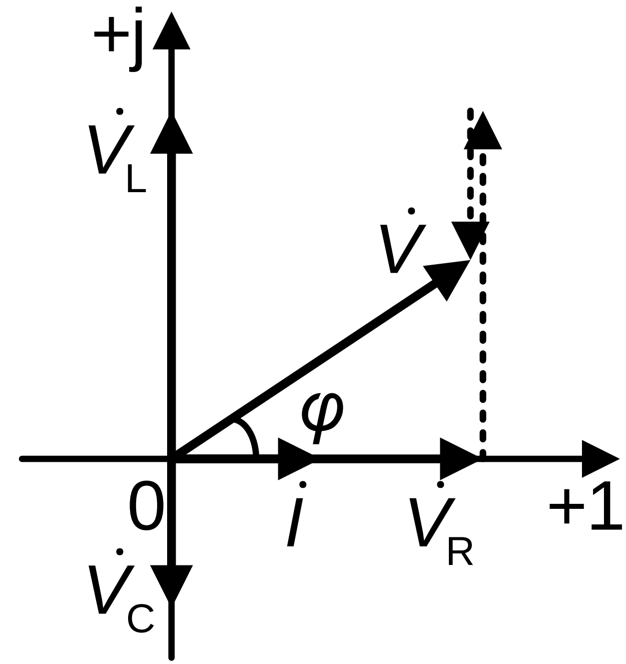




容性

RLC串联阻抗





$$Z=\frac{\dot{V}}{\dot{I}}=R+\mathrm{j}(\omega L-\frac{1}{\omega C})$$

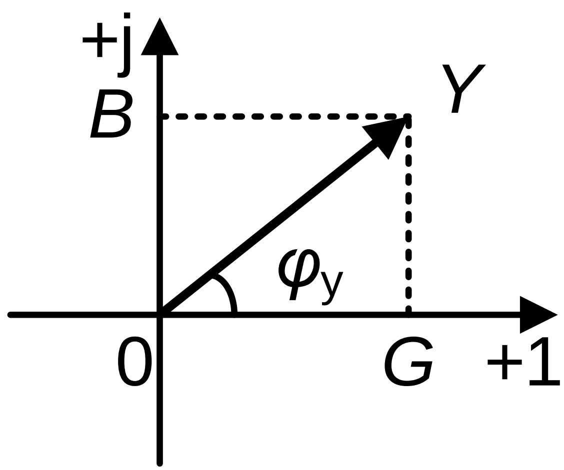
$\omega L = 1/\omega C$时，感抗与容抗相互抵消，$\dot{V}_R=\dot{V}$，$\dot{V}_L=-\dot{V}_C$

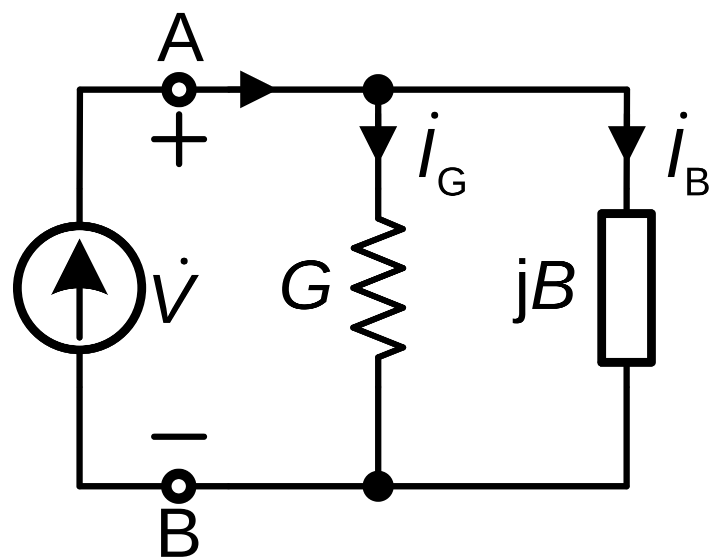
导纳

一端口电路N的端口电流相量与电压相量的比值定义为一端口电路N的(复)导纳。

$$Y=\frac{\dot{I}}{\dot{V}}=\frac{I}{V}\angle(\varphi_{\mathrm{i}}-\varphi_{\mathrm{v}})=|Y|\angle\varphi_{\mathrm{y}}=G+\mathrm{j}B$$

其中G为等效电导分量，B为等效电纳分量。



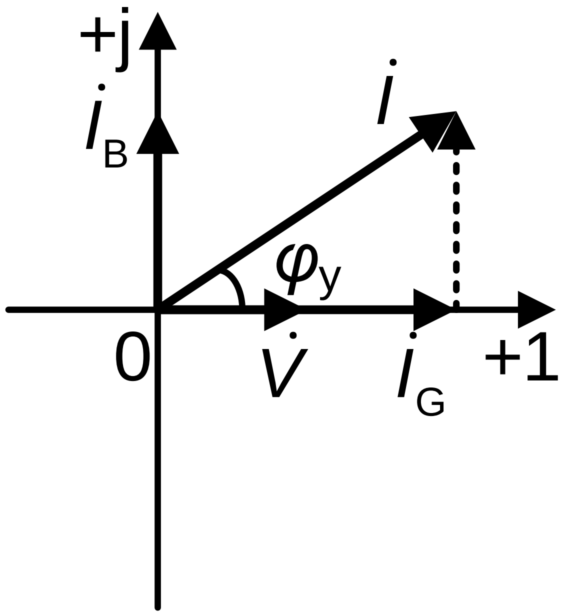


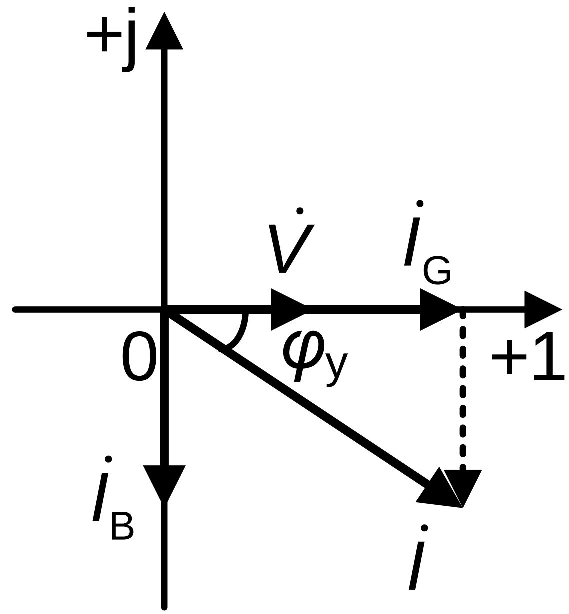
容性导纳和感性导纳

$B>0$时Y称为容性导纳，等效电容 $\omega C_{eq}=B,\ C_{eq}=\dfrac{B}{\omega}$

$B<0$时Y称为感性导纳，等效电感 $\dfrac{1}{\omega L_{eq}}=|B|,\ L_{eq}=\dfrac{1}{\omega|B|}$

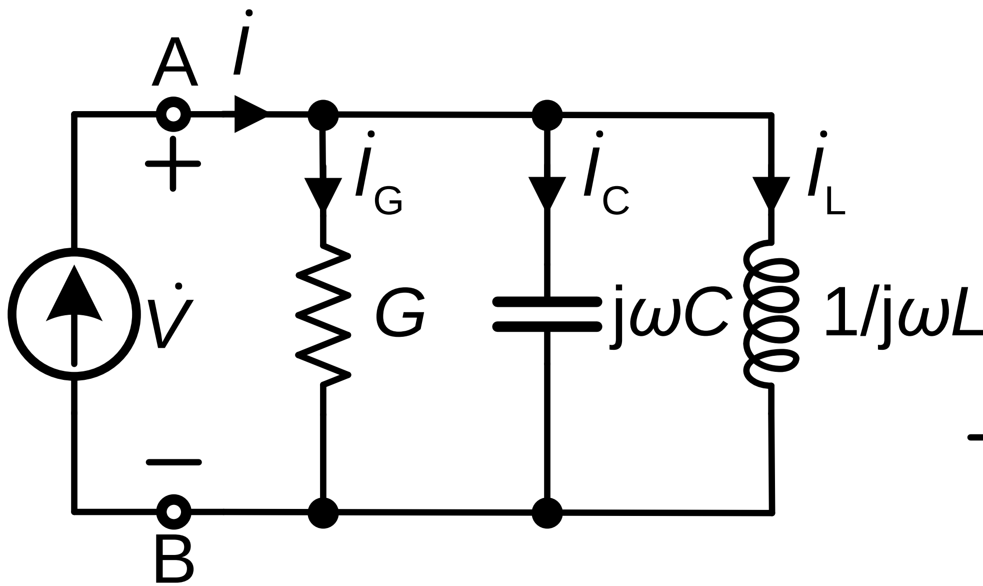
容性

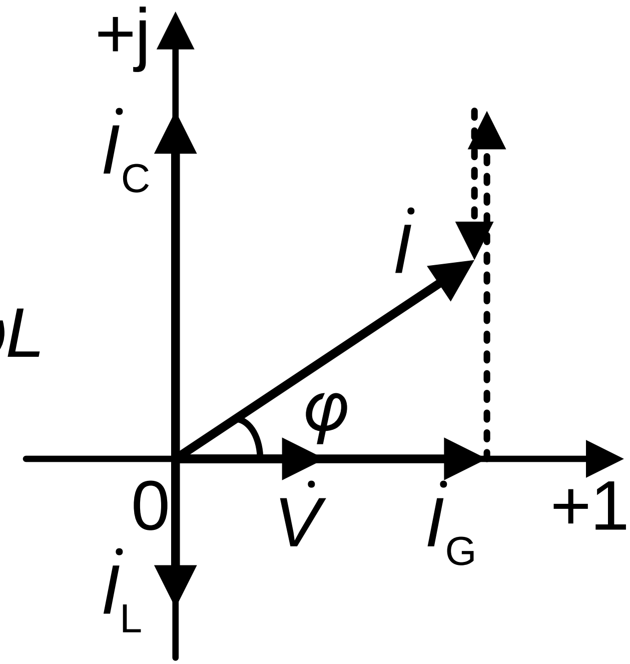




感性

RLC并联导纳





$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{V}} = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

$\omega C = 1/\omega L$时，容纳与感纳相互抵消，$\dot{I}_G = \dot{I}$, $\dot{I}_C = -\dot{I}_L$

阻抗和导纳的等效互换

一端口电路N的阻抗Z和导纳Y具有同等效用，彼此可以等效互换。

$$ZY=1,\quad |Z||Y|=1,\quad \varphi_z+\varphi_y=0$$

等效阻抗Z变换为等效导纳Y，即串联转并联等效

$$Y=G+\mathrm{j}B=\frac{1}{R+\mathrm{j}X},\ G=\frac{R}{R^2+X^2},\ B=-\frac{X}{R^2+X^2}$$

等效导纳Y变换为等效阻抗Z，即并联转串联等效

$$Z=R+\mathrm{j}X=\frac{1}{G+\mathrm{j}B},\ R=\frac{G}{G^2+B^2},\ X=-\frac{B}{G^2+B^2}$$

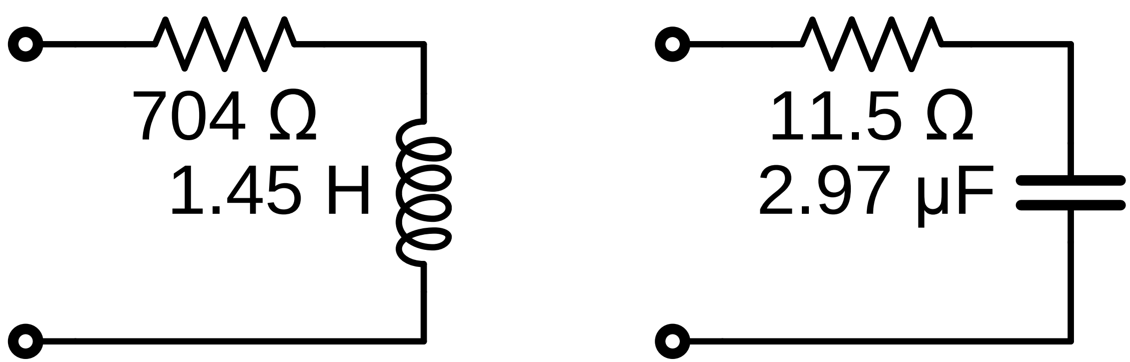
例题8

*RLC*并联电路，G = 1 mS，L = 2 H，C = 3 μF。试求频率分别为50 Hz和500 Hz的串联等效电路。

$$Y = G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L}),\ Z = \frac{1}{G + \mathrm{j}(\omega C - \frac{1}{\omega L})},$$

$$f = 50\ \mathrm{Hz},\ Z = (704 + \mathrm{j}457)\ \Omega,\ L_{\mathrm{eq}} = \frac{X_{\mathrm{L}}}{\omega} = 1.45\ \mathrm{H}$$

$$f = 500\ \mathrm{Hz},\ Z = (11.5 - \mathrm{j}107)\ \Omega,\ \mathrm{C}_{\mathrm{eq}} = \frac{1}{\omega X_{\mathrm{C}}} = 2.97\ \mu\mathrm{H}$$



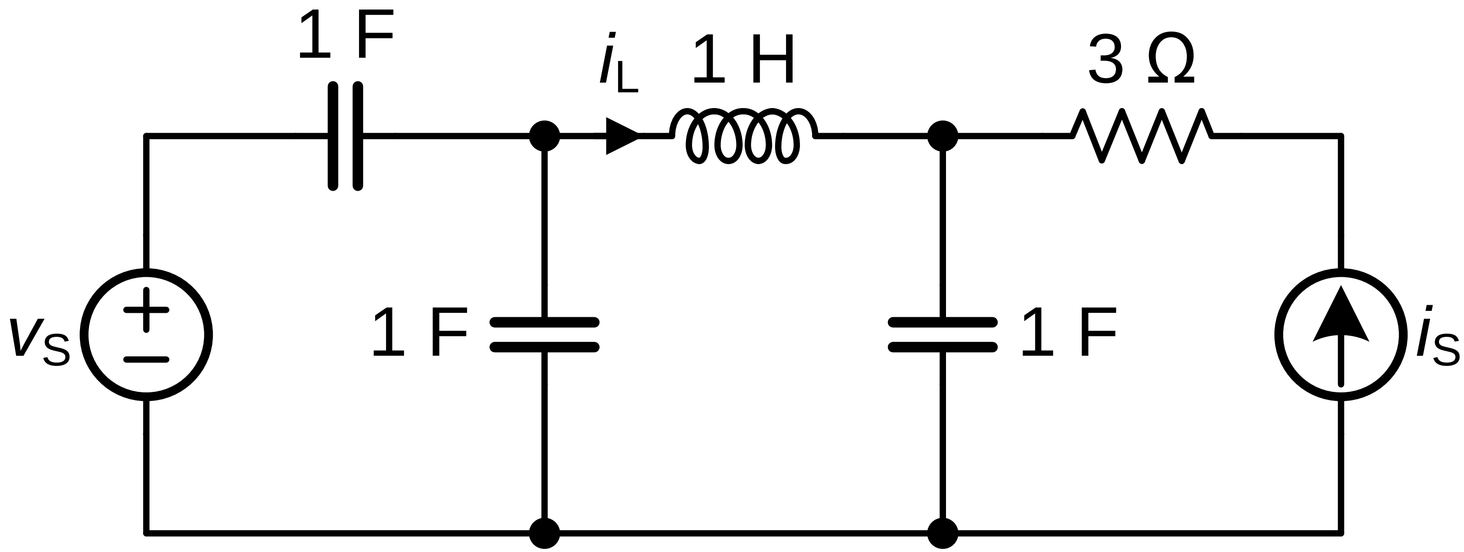
正弦交流电路的相量分析法

将电阻推广为阻抗，电导推广为导纳，电压源和电流源推广为电压源和电流源相量，元件模型转换为元件相量模型，就可以按照直流电路的方法来计算正弦交流电路，所列的方程为复系数线性代数方程。根据相量与正弦量的变换，由相量解答即可得到待求电压和电流的幅值和初相，进而得到他们的正弦量表达式。

例题9

如图所示电路，电压源 $v_S = 2\sqrt{2}\sin(t+45°)$，电流源 $i_S = \sqrt{2}\cos(t-45°)$，求电流$i_L$。

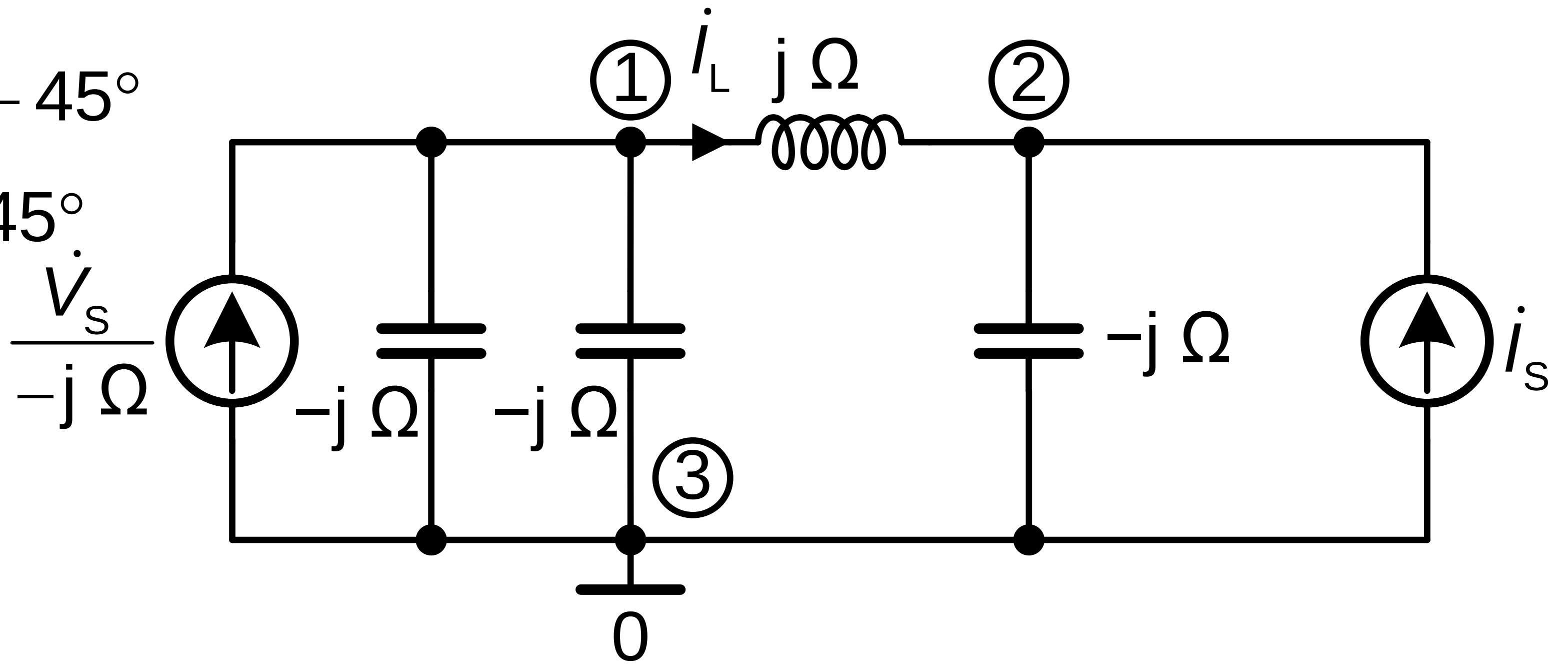
节点电压法，回路电流法，叠加定理，戴维南等效电路



解法1：节点电压法

$\dot{V}_S = 2\angle-45°$

$\dot{I}_S = \angle-45°$

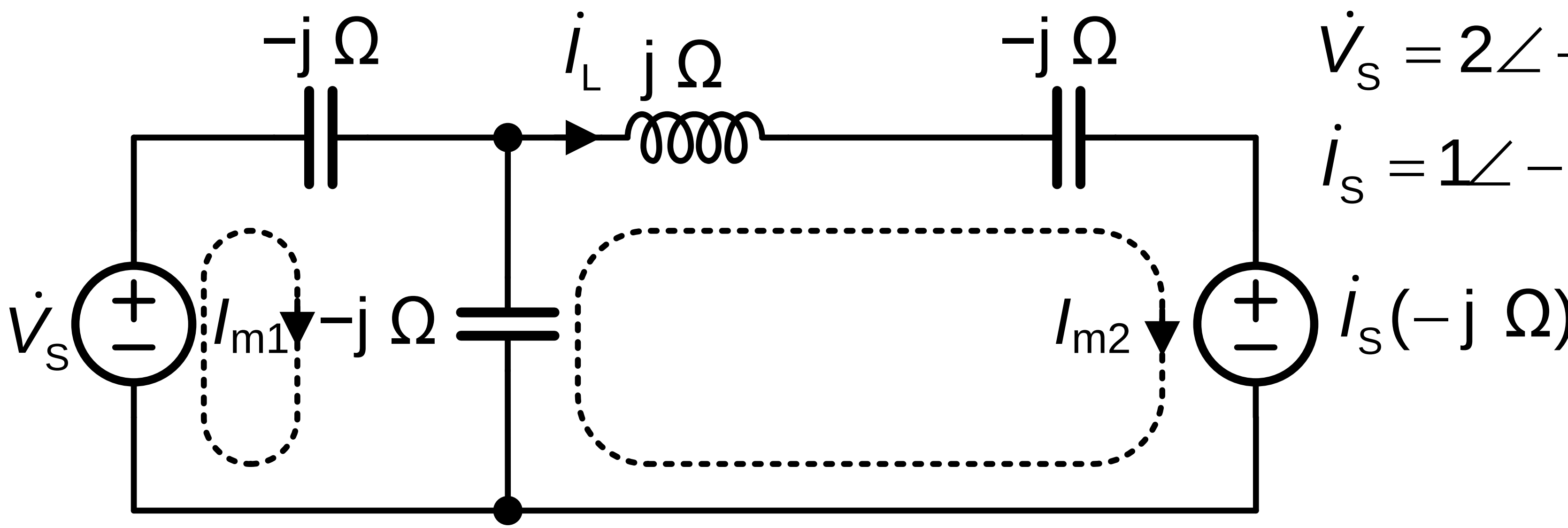


$$\begin{cases}\left(\frac{1}{-j\ \Omega}+\frac{1}{-j\ \Omega}+\frac{1}{j\ \Omega}\right)\dot{V}_{n1}-\frac{1}{j\ \Omega}\dot{V}_{n2}=\frac{\dot{V}_S}{-j\ \Omega}\\ -\frac{1}{j\Omega}\dot{V}_{n1}+\left(\frac{1}{j\Omega}+\frac{1}{-j\ \Omega}\right)\dot{V}_{n2}=\dot{I}_S\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{V}_{n1}=-j\dot{I}_S\\ \dot{V}_{n2}=\dot{V}_S+j\dot{I}_S\end{cases}$$

$$\dot{I}_L=\frac{\dot{V}_{n1}-\dot{V}_{n2}}{j\ \Omega}=j\dot{V}_S-2\dot{I}_S=j2\sqrt{2},\ \ i_L=4\cos(t+90°)$$

解法2：回路电流法



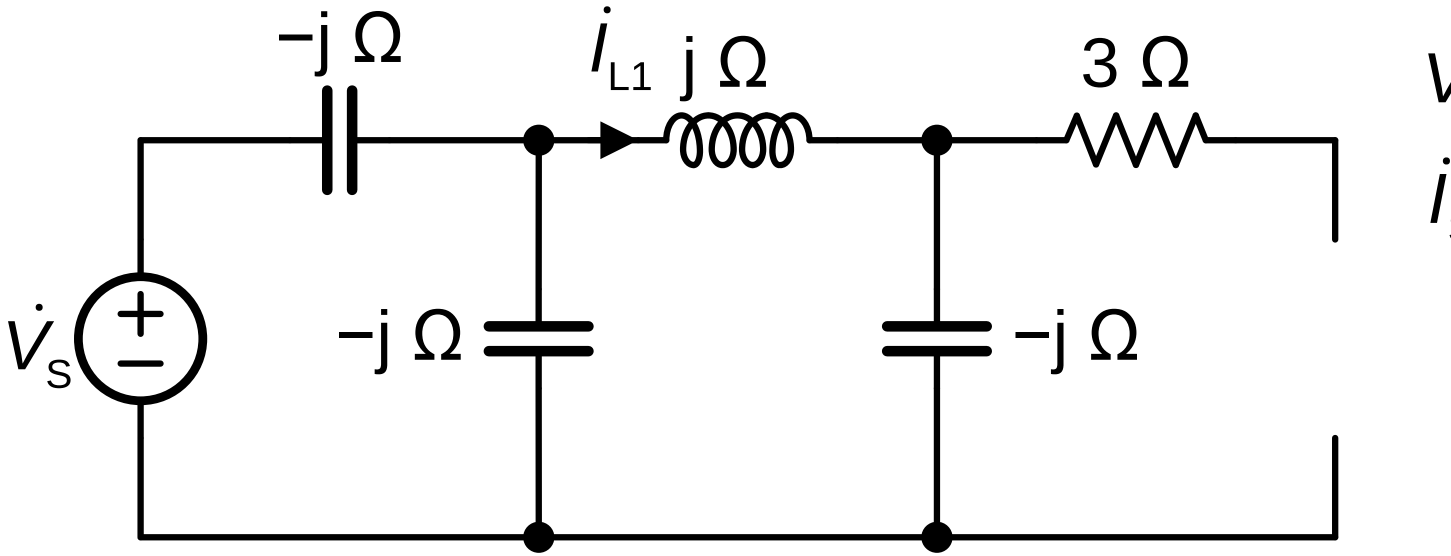
$\dot{V}_S = 2\angle-45°$

$\dot{I}_S = 1\angle-45°$

$$\begin{cases}(-j\ \Omega - j\ \Omega)\dot{I}_{m1} - (-j\ \Omega)\dot{I}_{m2} = \dot{V}_S \\ -(-j\ \Omega)\dot{I}_{m1} + (-j\Omega + j\Omega - j\ \Omega)\dot{I}_{m2} = -\dot{I}_S(-j\ \Omega)\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{I}_{m1} = j\dot{V}_S - \dot{I}_S \\ \dot{I}_{m2} = j\dot{V}_S - 2\dot{I}_S\end{cases}$$

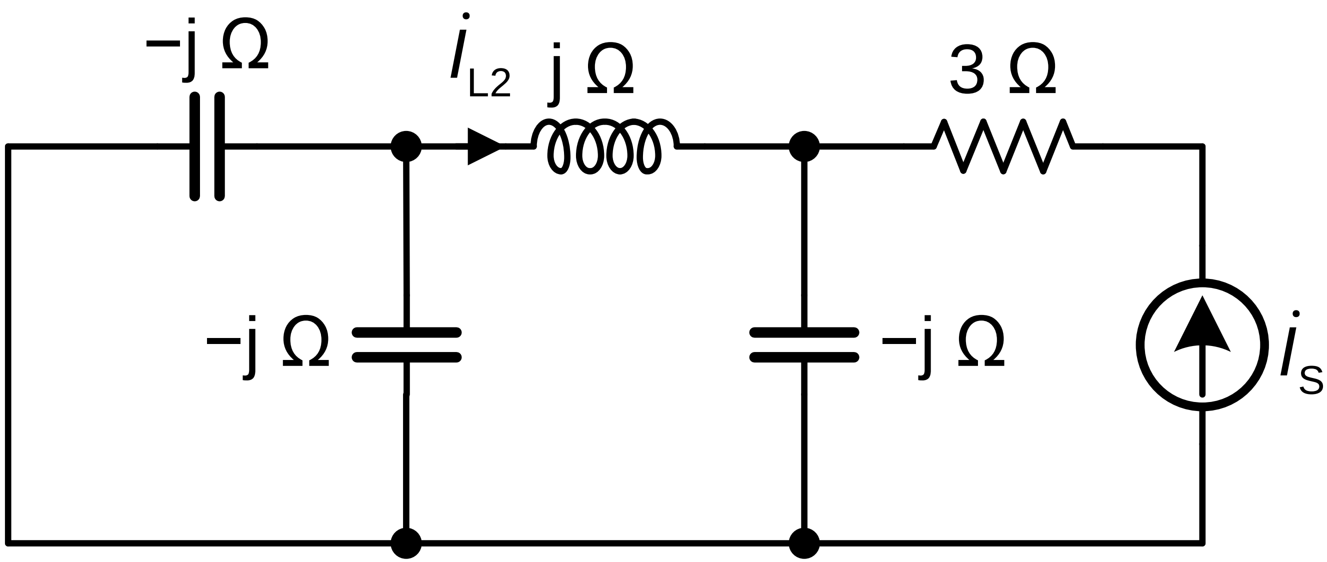
$$\dot{I}_L = \dot{I}_{m2} = j\dot{V}_S - 2\dot{I}_S = j2\sqrt{2},\ \ i_L = 4\cos(t+90°)$$

解法3：叠加定理



$$\dot{V}_S = 2\angle -45^\circ$$

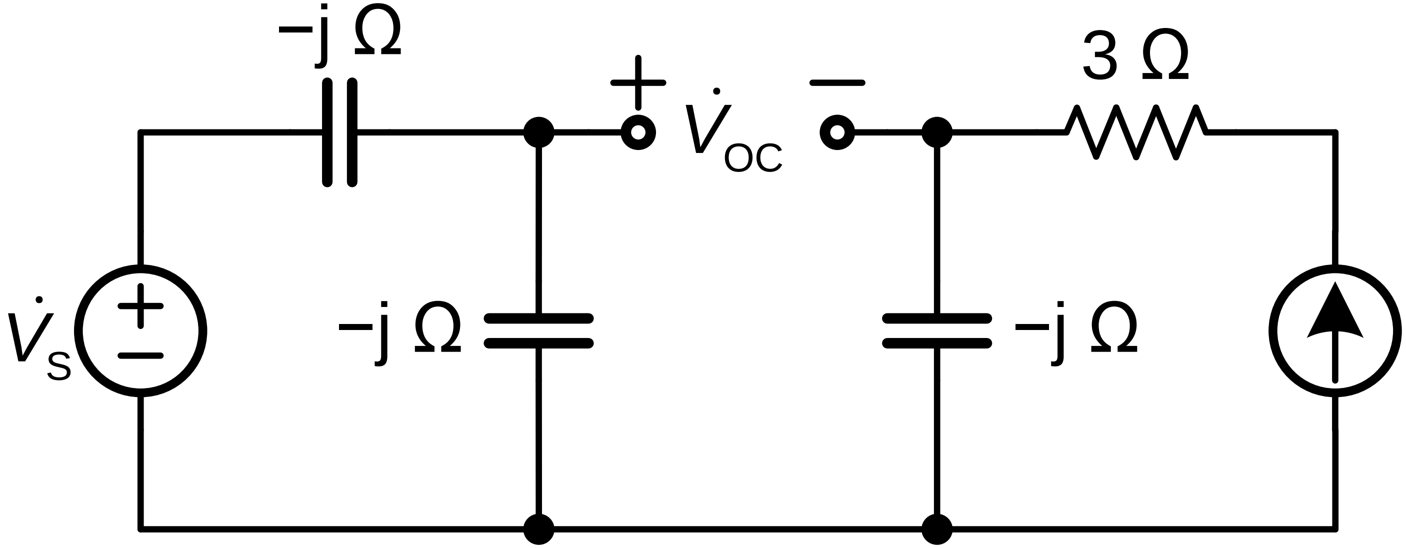
$$\dot{I}_S = 1\angle -45^\circ$$



$$\begin{aligned}
\dot{I}_L &= \dot{I}_{L1} + \dot{I}_{L2} \\
&= \frac{\dot{V}_S}{-\mathrm{j}\ \Omega} - 2\dot{I}_S \\
&= \mathrm{j}\dot{V}_S - 2\dot{I}_S \\
&= \mathrm{j}2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

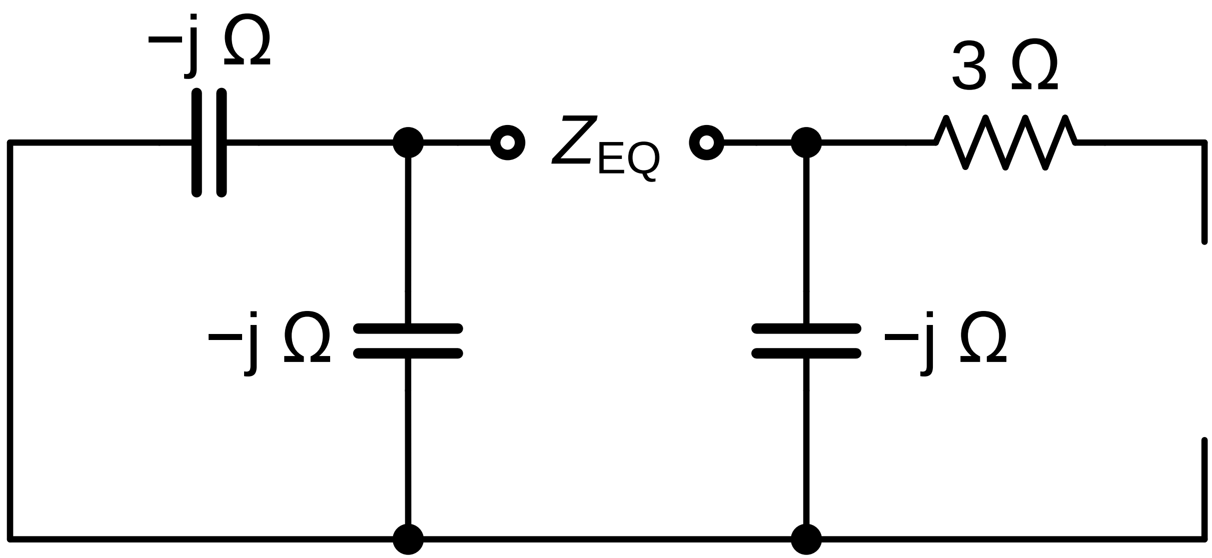
$$i_L = 4\cos(t + 90^\circ)$$

解法4：戴维南等效电路



$$\dot{V}_S = 2\angle -45^\circ$$

$$\dot{I}_S = 1\angle -45^\circ$$



$$\dot{V}_{OC} = \frac{\dot{V}_S}{2} + \mathrm{j}\dot{I}_S$$

$$Z_{EQ} = -\frac{3}{2}\mathrm{j}\ \Omega$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{V}_{OC}}{Z_{EQ} + Z_L}$$

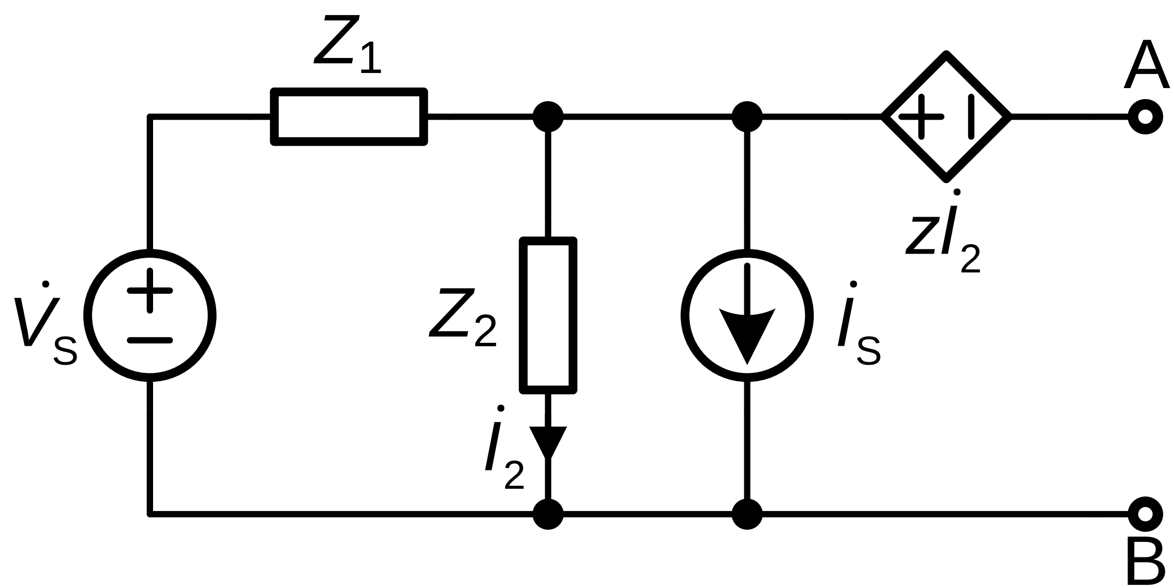
$$= \mathrm{j}\dot{V}_S - 2\dot{I}_S$$

$$= \mathrm{j}2\sqrt{2}$$

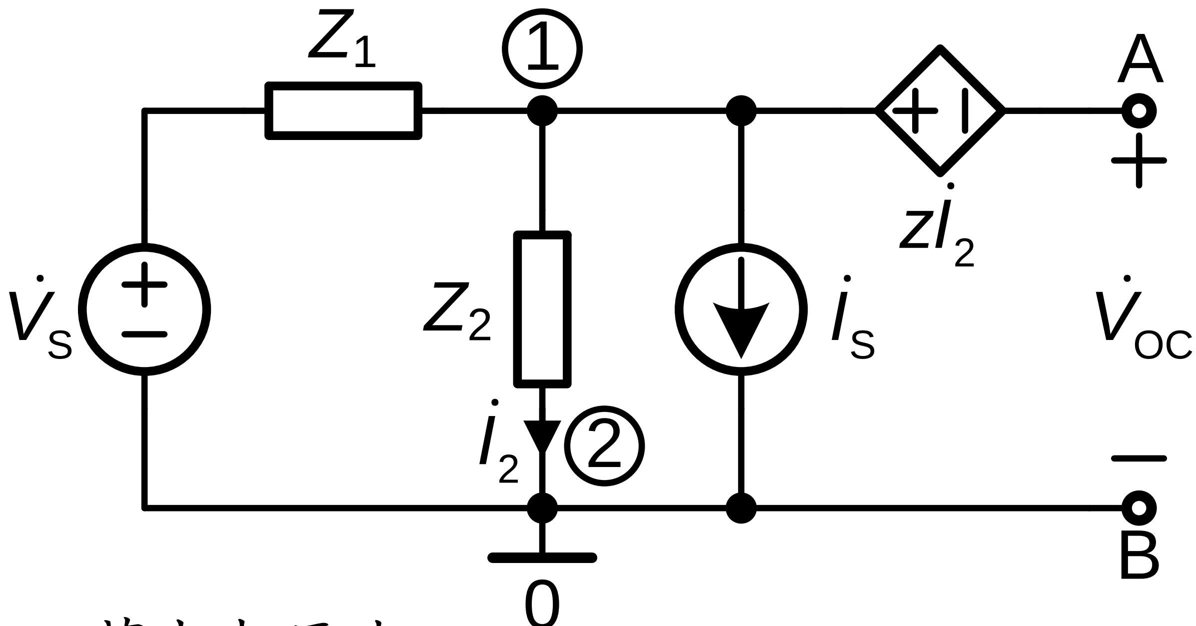
$$i_L = 4\cos(t + 90^\circ)$$

例题10

求如图所示电路的戴维南等效电路。



解法1：开路电压V_{OC}

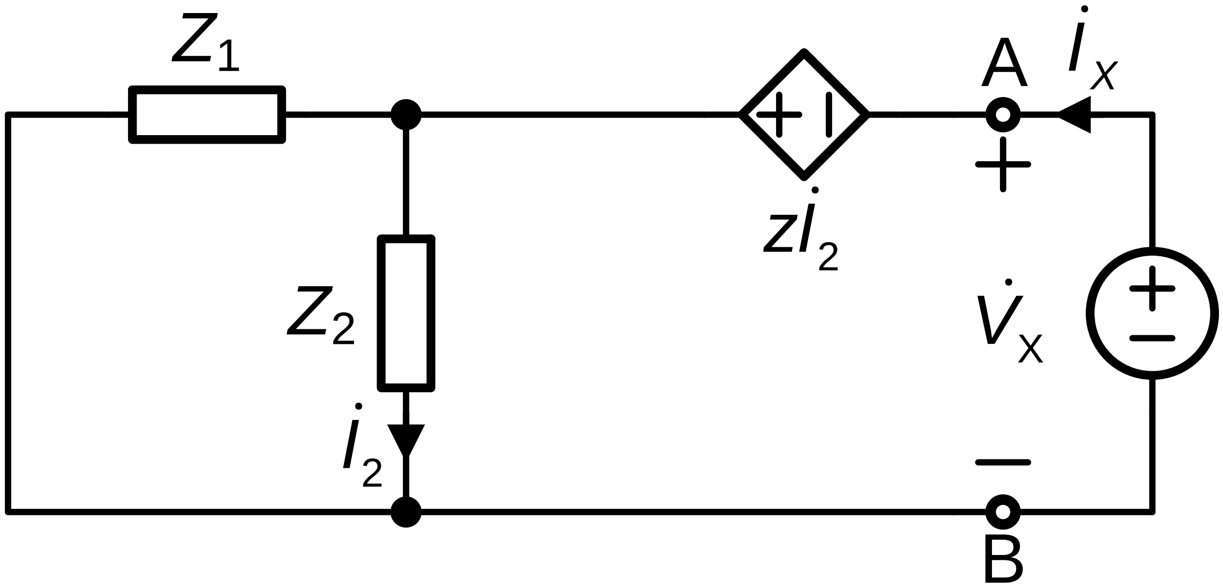


节点电压法

$$(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2})\dot{V}_{n1}=\frac{\dot{V}_S}{Z_1}-\dot{I}_S,\quad \dot{V}_{n1}=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}(\dot{V}_S-Z_1\dot{I}_S)$$

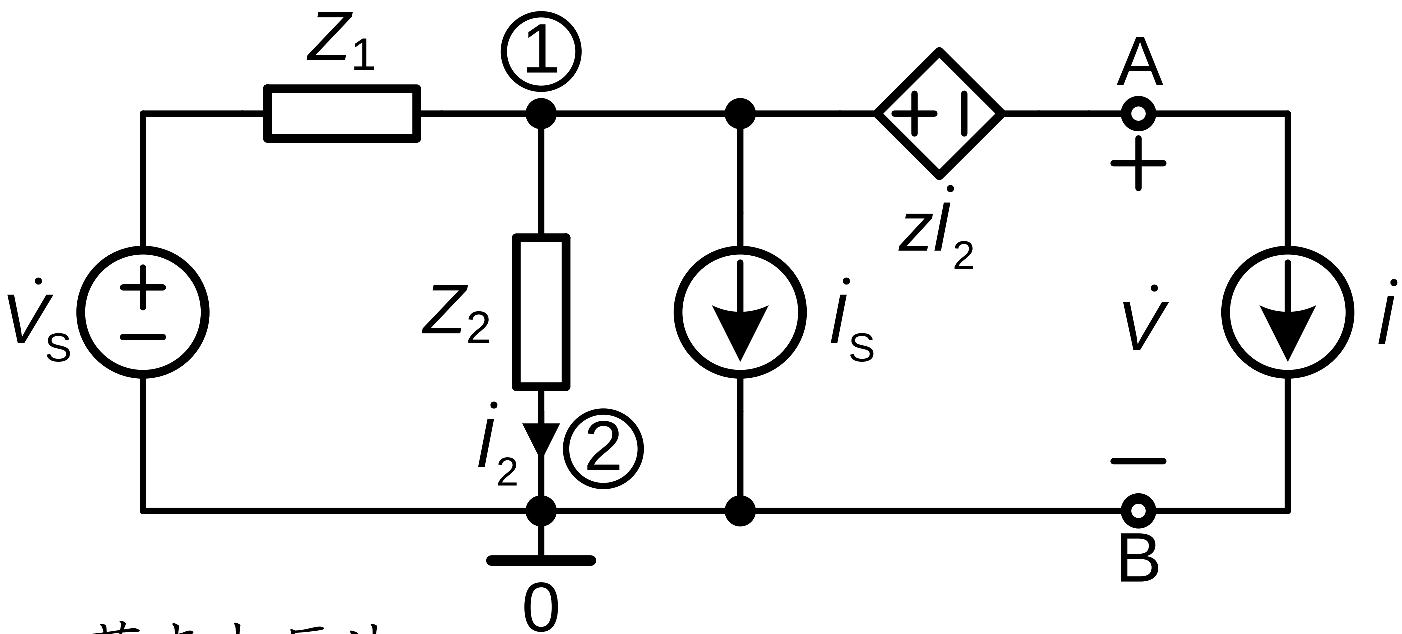
$$\dot{V}_{OC}=\dot{V}_{n1}-z\dot{I}_2=\dot{V}_{n1}-z\frac{\dot{V}_{n1}}{Z_2}=\frac{Z_2-z}{Z_1+Z_2}(\dot{V}_S-Z_1\dot{I}_S)$$

等效阻抗Z_{EQ}



$$Z_{EQ}=\frac{\dot{V}_X}{\dot{I}_X}=\frac{\dot{I}_X(Z_1\parallel Z_2)-z\dot{I}_X\dfrac{Z_1}{Z_1+Z_2}}{\dot{I}_X}=\frac{(Z_2-z)}{Z_1+Z_2}Z_1$$

解法2：一步求解法



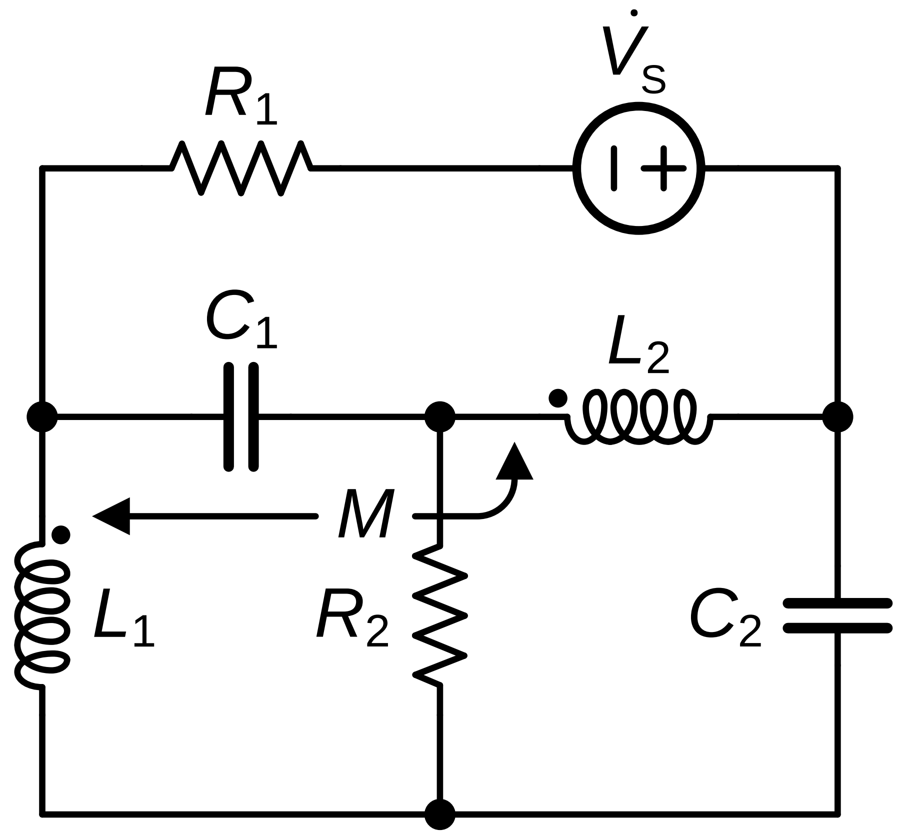
节点电压法

$$\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}\right)\dot{V}_{n1}=\frac{\dot{V}_S}{Z_1}-\dot{I}_S-\dot{I},\quad \dot{V}_{n1}=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}\left(\dot{V}_S-Z_1\dot{I}_S-Z_1\dot{I}\right)$$

$$\dot{V}=\dot{V}_{n1}-z\dot{I}_2=\dot{V}_{n1}-z\frac{\dot{V}_{n1}}{Z_2}=\frac{Z_2-z}{Z_1+Z_2}\left(\dot{V}_S-Z_1\dot{I}_S\right)-\frac{Z_2-z}{Z_1+Z_2}Z_1\dot{I}=\dot{V}_{OC}-Z_{EQ}\dot{I}$$

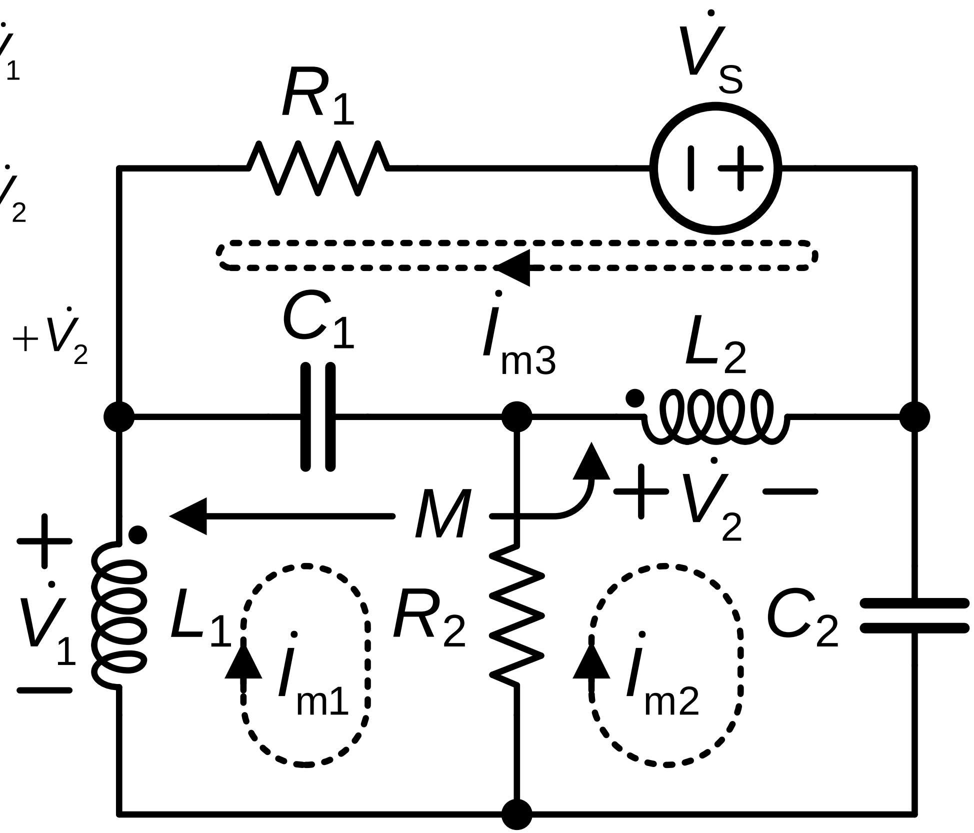
例题11

列写如图所示电路的回路电流方程和节点电压方程。



回路电流方程

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}+R_2\right)\dot{I}_{\mathrm{m1}}-R_2\dot{I}_{\mathrm{m2}}-\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}\dot{I}_{\mathrm{m3}}=\dot{V}_1 \\
-R_2\dot{I}_{\mathrm{m1}}+\left(R_2+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}\right)\dot{I}_{\mathrm{m2}}-0\times\dot{I}_{\mathrm{m3}}=-\dot{V}_2 \\
-\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}\dot{I}_{\mathrm{m1}}-0\times\dot{I}_{\mathrm{m2}}+\left(\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}+R_1\right)\dot{I}_{\mathrm{m3}}=\dot{V}_{\mathrm{S}}+\dot{V}_2
\end{cases}
$$



补充方程

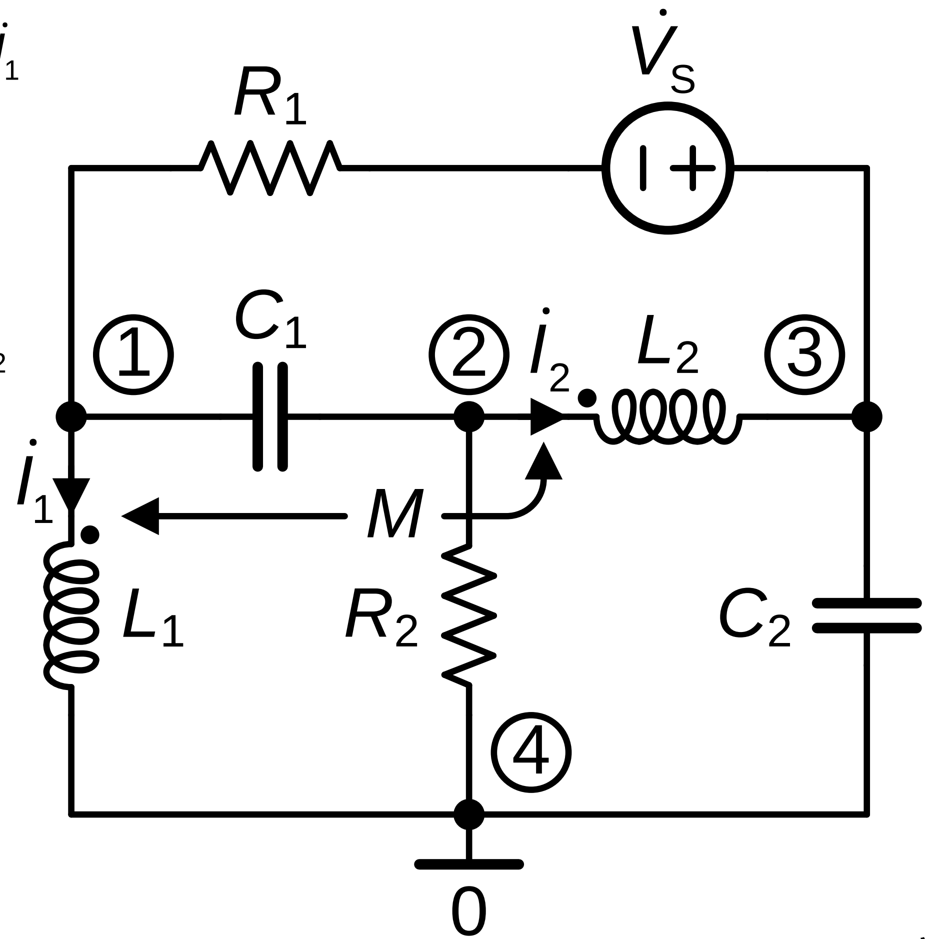
$$
\begin{cases}
\dot{V}_1=\mathrm{j}\omega L_1(-\dot{I}_{\mathrm{m1}})+\mathrm{j}\omega M(\dot{I}_{\mathrm{m2}}-\dot{I}_{\mathrm{m3}}) \\
\dot{V}_2=\mathrm{j}\omega M(-\dot{I}_{\mathrm{m1}})+\mathrm{j}\omega L_2(\dot{I}_{\mathrm{m2}}-\dot{I}_{\mathrm{m3}})
\end{cases}
$$

节点电压方程

$$
\begin{cases}
(\mathrm{j}\omega C_1+\dfrac{1}{R_1})\dot{V}_{\mathrm{n1}}-\mathrm{j}\omega C_1\dot{V}_{\mathrm{n2}}-\dfrac{1}{R_1}\dot{V}_{\mathrm{n3}}=-\dfrac{\dot{V}_{\mathrm{S}}}{R_1}-\dot{I}_1\\
-\mathrm{j}\omega C_1\dot{V}_{\mathrm{n1}}+(\mathrm{j}\omega C_1+\dfrac{1}{R_2})\dot{V}_{\mathrm{n2}}-0\times\dot{V}_{\mathrm{n3}}=-\dot{I}_2\\
-\dfrac{1}{R_1}\dot{V}_{\mathrm{n1}}-0\times\dot{V}_{\mathrm{n2}}+(\mathrm{j}\omega C_2+\dfrac{1}{R_1})\dot{V}_{\mathrm{n3}}=\dfrac{\dot{V}_{\mathrm{S}}}{R_1}+\dot{I}_2
\end{cases}
$$

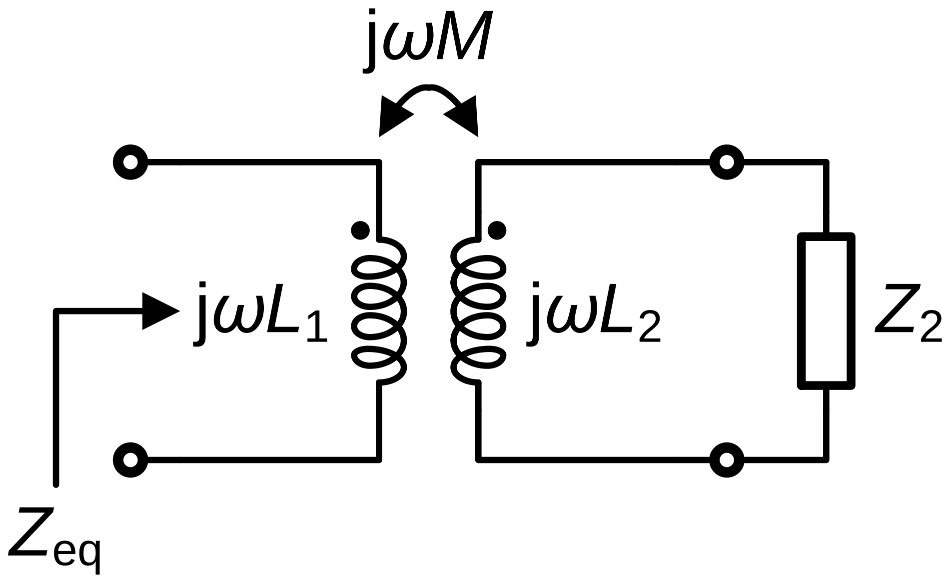
补充方程

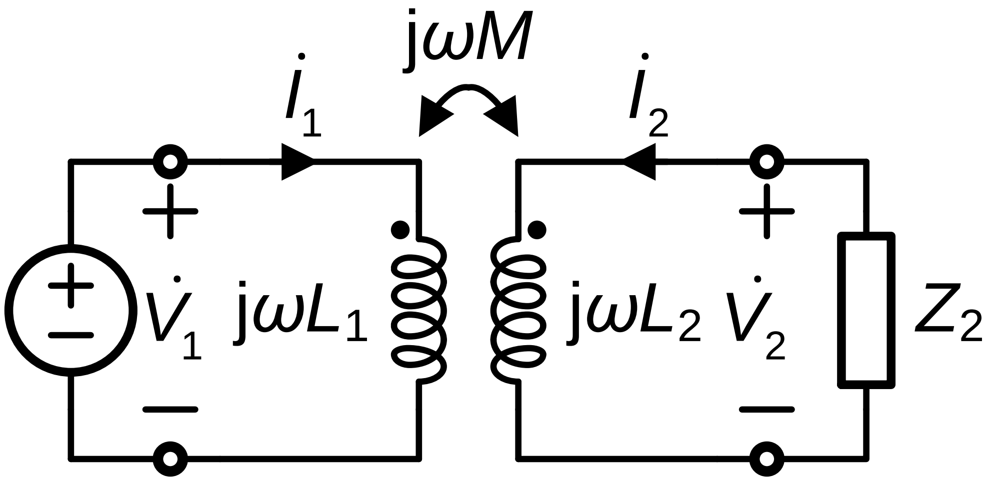
$$
\begin{cases}
\dot{V}_{\mathrm{n1}}=\mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2\\
\dot{V}_{\mathrm{n2}}-\dot{V}_{\mathrm{n3}}=\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2
\end{cases}
$$

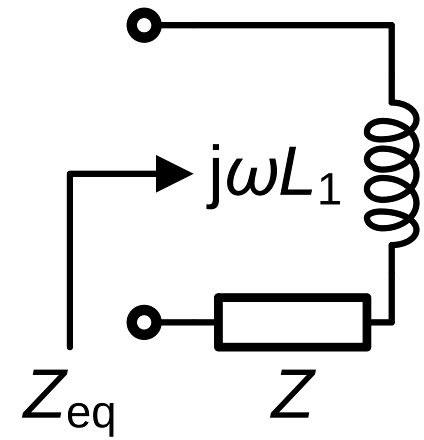


例题12

如图所示电路，计算互感一次侧的等效阻抗。







$$\begin{cases} \dot{V}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = j\omega M \dot{I}_1 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = -Z_2 \dot{I}_2 \end{cases}$$

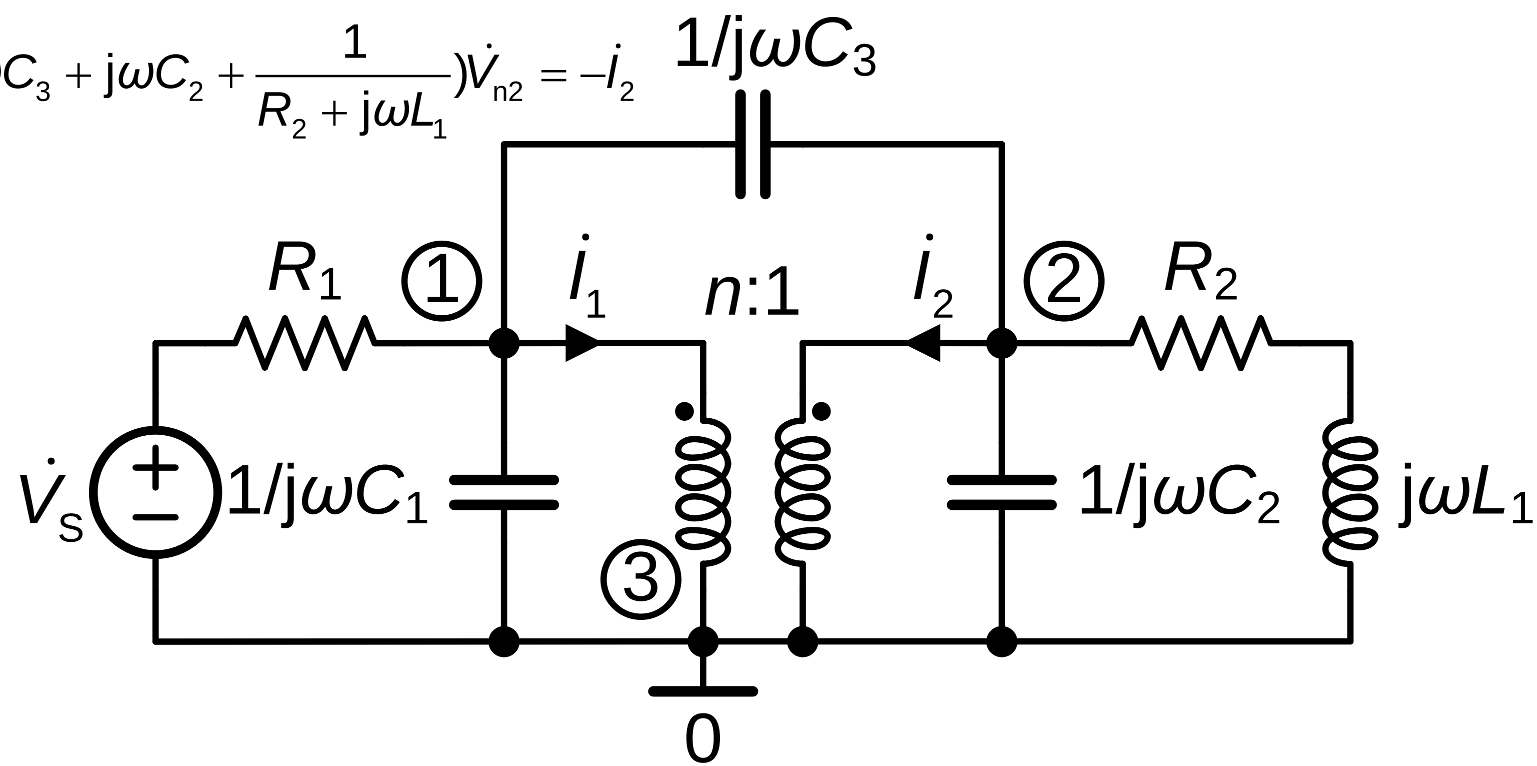
$$Z_{\text{eq}} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{(\omega M)^2}{j\omega L_2 + Z_2}$$

例题13

列写如图所示电路的节点电压方程。

$$\begin{cases} (\frac{1}{R_1}+\mathrm{j}\omega C_1+\mathrm{j}\omega C_3)\dot{V}_{\mathrm{n1}}-\mathrm{j}\omega C_3\dot{V}_{\mathrm{n2}}=\frac{\dot{V}_{\mathrm{S}}}{R_1}-\dot{I}_1 \\ -\mathrm{j}\omega C_3\dot{V}_{\mathrm{n1}}+(\mathrm{j}\omega C_3+\mathrm{j}\omega C_2+\frac{1}{R_2+\mathrm{j}\omega L_1})\dot{V}_{\mathrm{n2}}=-\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{V}_1=n\dot{V}_2 \\ \dot{I}_1=-\frac{\dot{I}_2}{n} \end{cases}$$



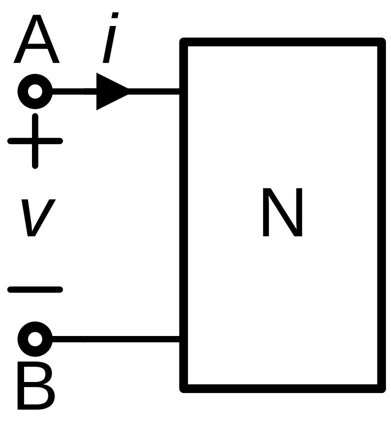
正弦交流电路的功率

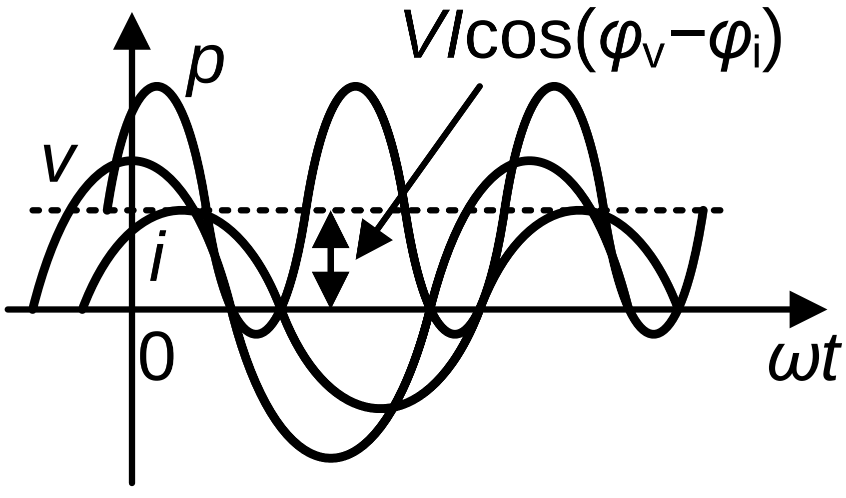
- 瞬时功率

$$p(t) = vi$$

$$= \sqrt{2}V\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{v})\sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi_\mathrm{i})$$

$$= VI\cos(\varphi_\mathrm{v} - \varphi_\mathrm{i}) + VI\cos(2\omega t + \varphi_\mathrm{v} + \varphi_\mathrm{i})$$





- 平均功率

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t = VI\cos(\varphi_\mathrm{v} - \varphi_\mathrm{i}) = VI\lambda$$

- 功率因数λ和功率因数角φ

$$\lambda = \cos\varphi = \cos(\varphi_\mathrm{v} - \varphi_\mathrm{i}) = \cos\varphi_\mathrm{z} = \cos(-\varphi_\mathrm{y}) = \cos\varphi_\mathrm{y}$$

功率三角形

- 有功功率P,单位瓦[特], W

$$P = VI\cos\varphi = VI\lambda$$

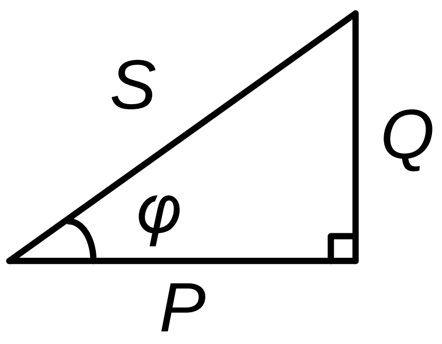
- 无功功率Q, 单位乏，var

$$Q = VI\sin\varphi = VI\sqrt{1-\lambda^2}$$

- 视在功率S，单位伏安，VA

$$S = VI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

有功功率：active power
无功功率：reactive power
视在功率：apparent power

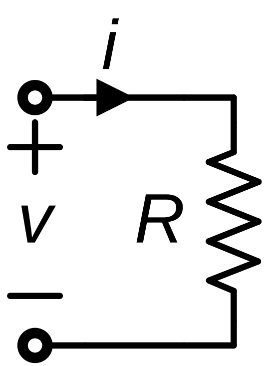


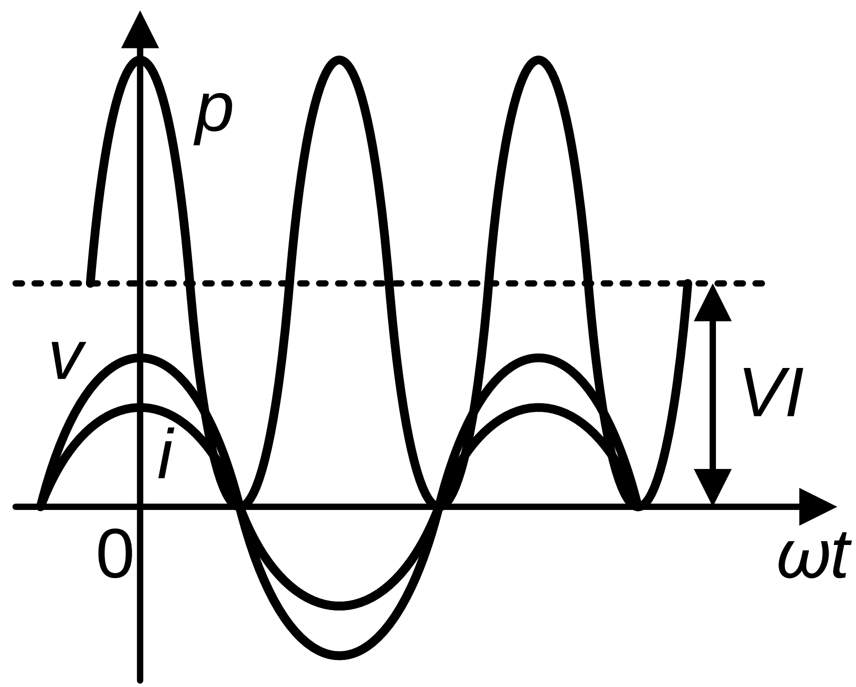
电阻的功率

有功功率：$P = VI = V^2/R = I^2R$，无功功率：$Q = 0$

视在功率：$S = P$，　　功率因数：$\lambda = 1$

功率因数角：$\varphi = 0^o$





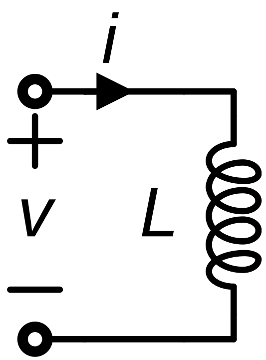
电感的功率

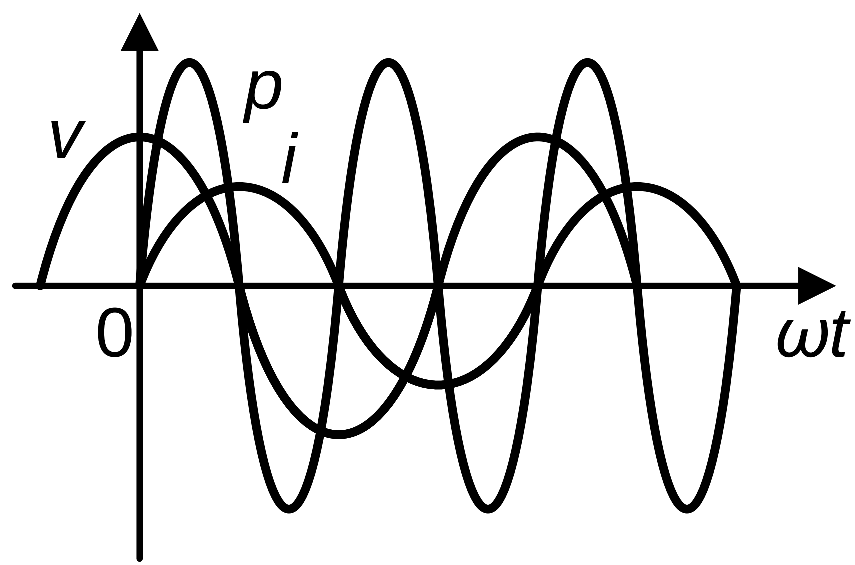
有功功率：$P = 0$

无功功率：$Q = VI = V^2/\omega L = I^2\omega L > 0$

视在功率：$S = Q$，　　功率因数：$\lambda = 0$

功率因数角：$\varphi = 90^o$





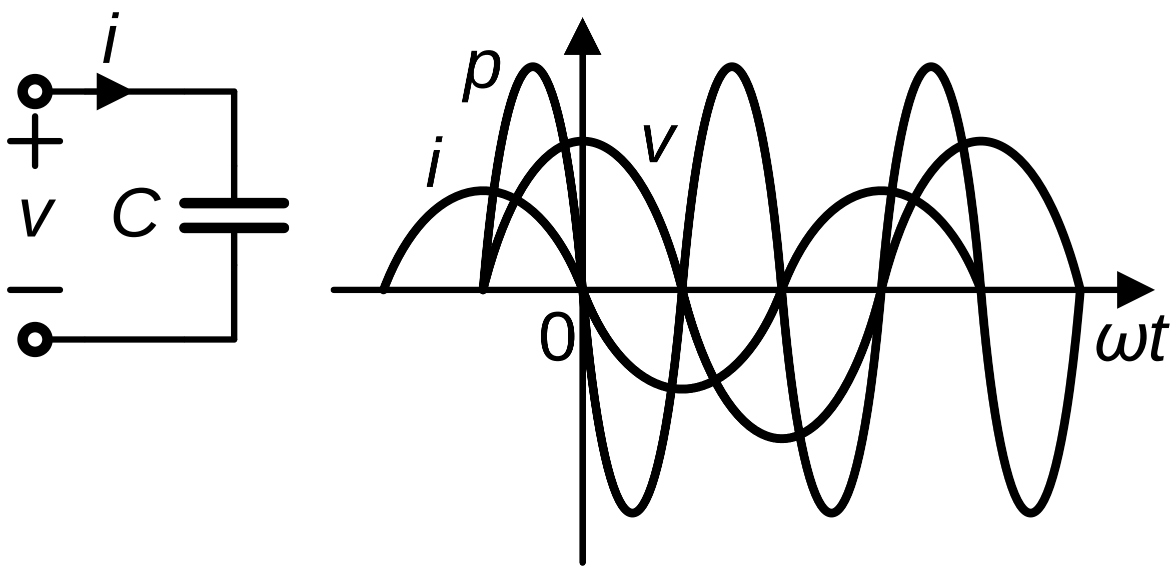
电容的功率

有功功率：$P = 0$

无功功率：$Q = -VI = -V^2\omega C = -I^2/\omega C < 0$

视在功率：$S = |Q|$，　　功率因数：$\lambda = 0$

功率因数角：$\varphi = -90°$

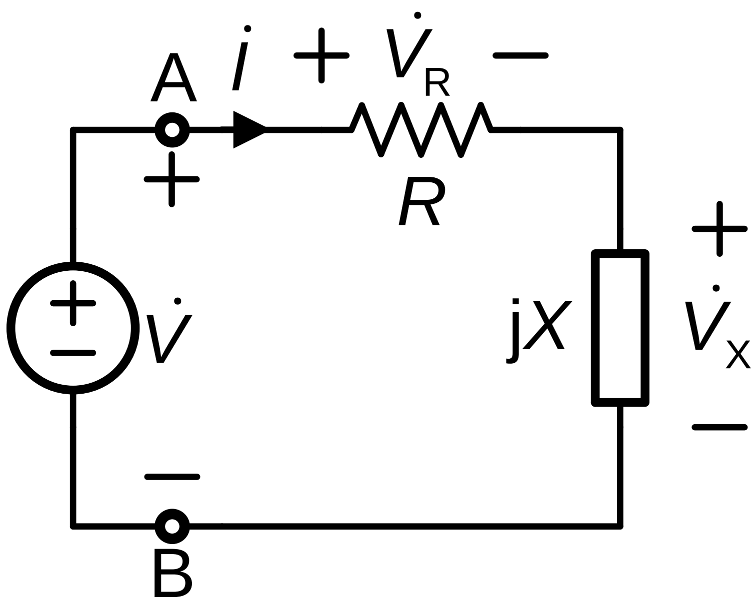


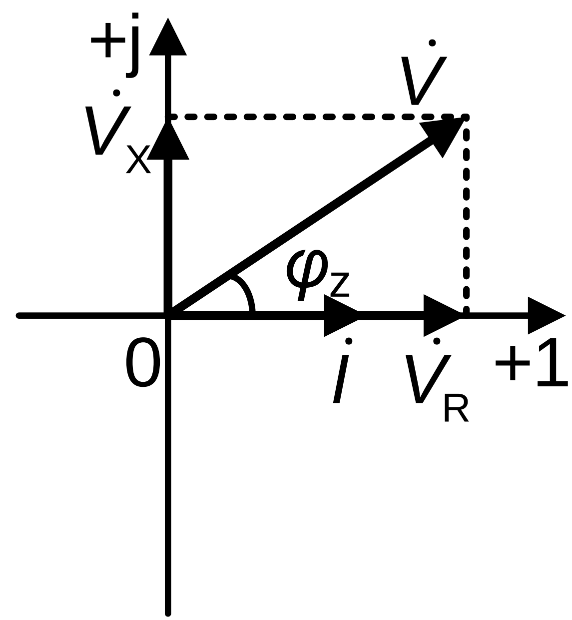
(串联)阻抗的功率

有功功率：$P = I^2R$，　　无功功率：$Q = I^2X$

视在功率：$S = VI$，　　功率因数：$\lambda = \cos\varphi_z$

功率因数角：$\varphi = \varphi_z$



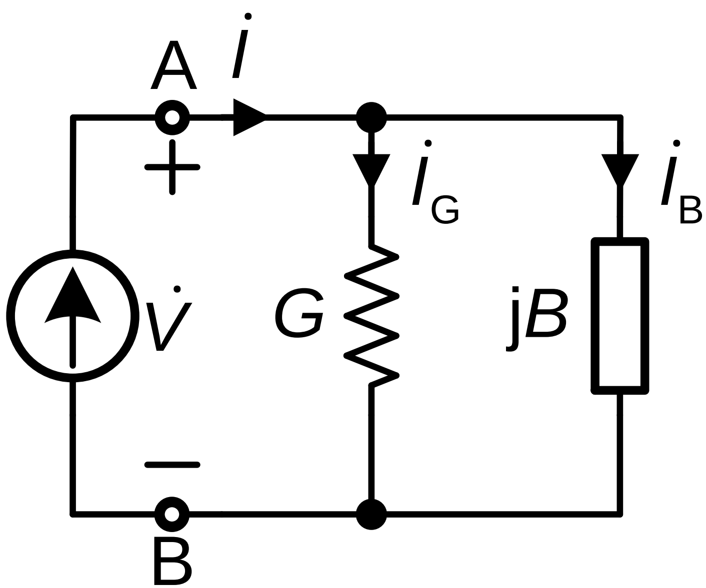


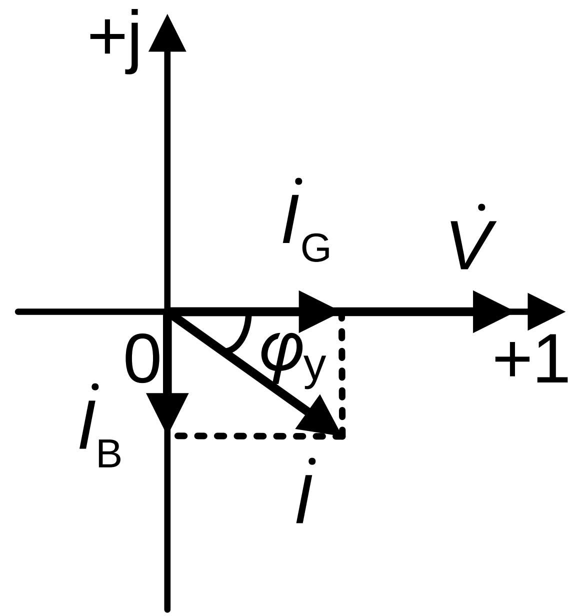
(并联)导纳的功率

有功功率：$P = V^2G$， 无功功率：$Q = -V^2B$

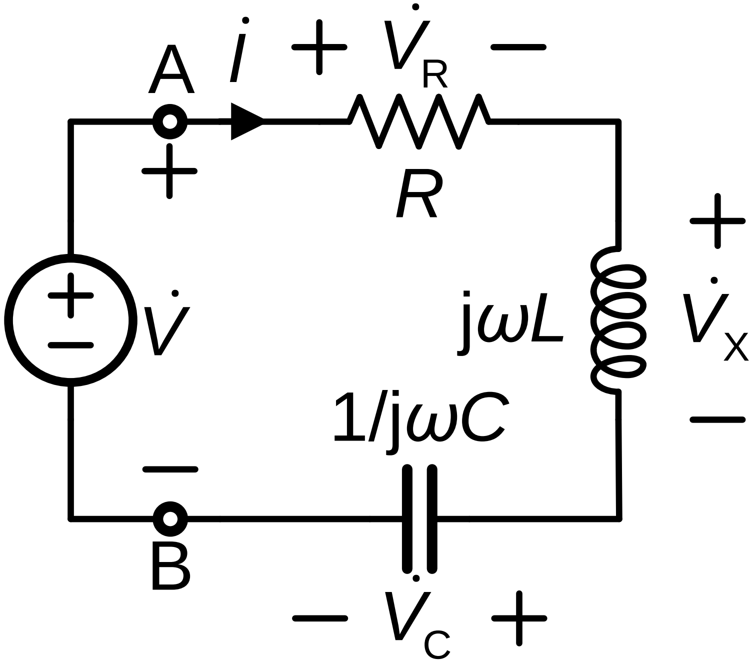
视在功率：$S = VI$， 功率因数：$\lambda = \cos(-\varphi_y)$

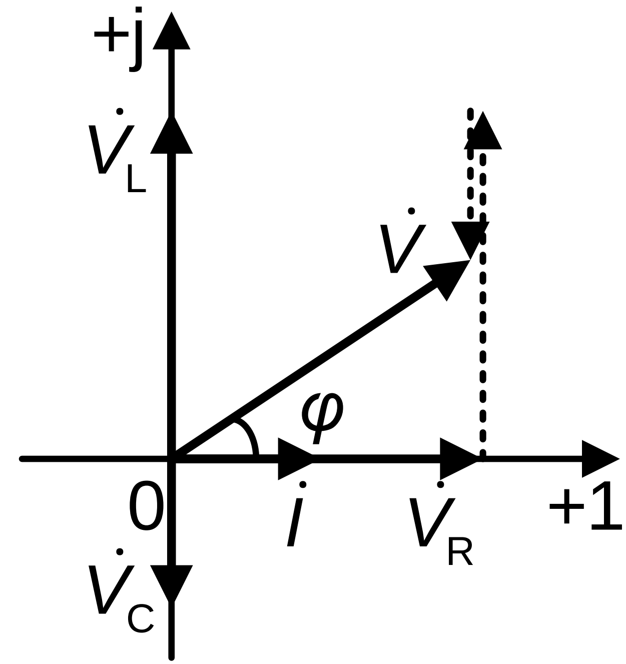
功率因数角：$\varphi = -\varphi_y$





RLC串联电路的功率

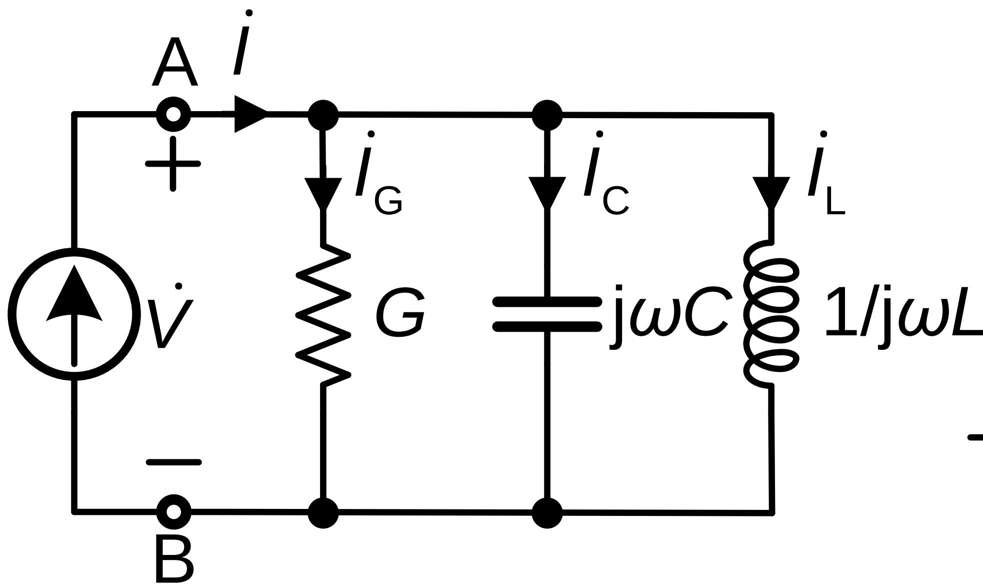


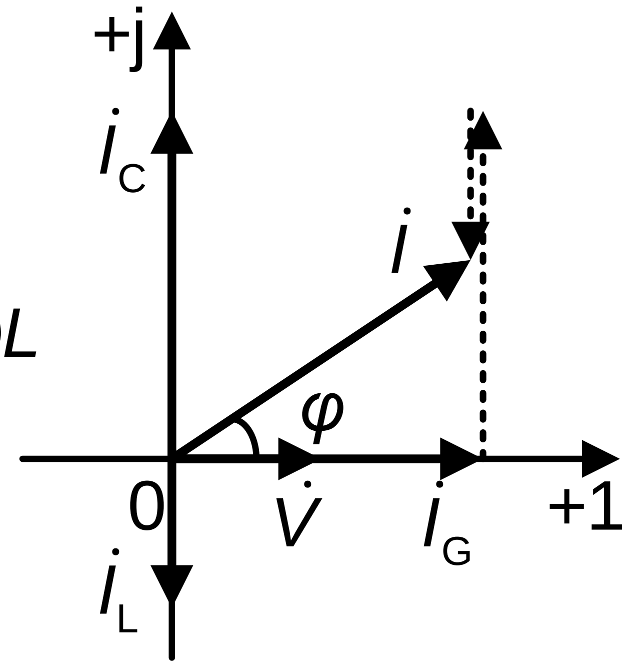


$$P = P_R,\ Q = Q_L + Q_C,\ S = \sqrt{P_G^2 + (Q_L + Q_C)^2}$$

$\omega L = 1/\omega C$时，感抗与容抗相互抵消，$Q = 0,\ Q_L = -Q_C$

RLC并联电路的功率



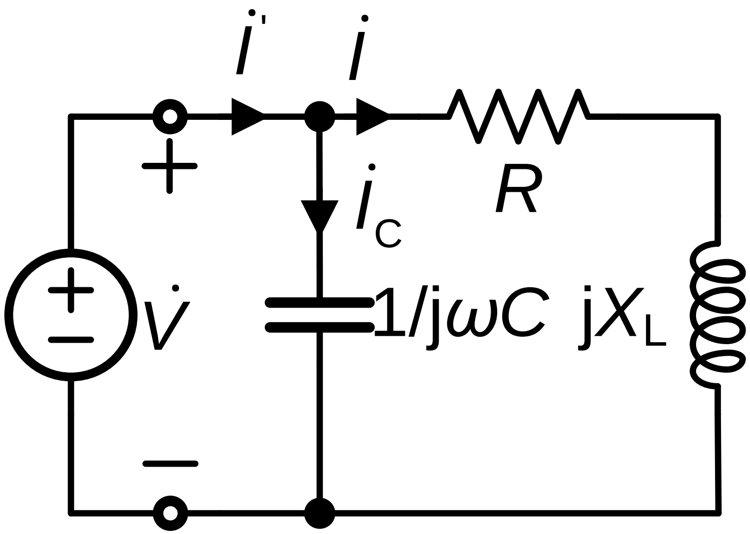


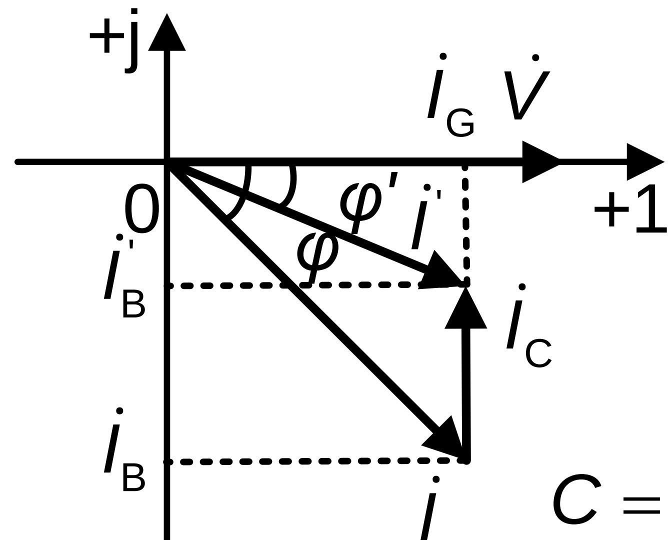
$$P = P_G,\ Q = Q_L + Q_C,\ S = \sqrt{P_R^2 + (Q_L + Q_C)^2}$$

$\omega C = 1/\omega L$时，容纳与感纳相互抵消，$Q = 0,\ Q_L = -Q_C$

功率因数的提高：无功补偿

工程上的负载多为感性，为了提高功率因数可以在感性负载两端并联电容。这种利用容性无功功率抵消部分感性无功功率的做法称为无功补偿。





$$C = \frac{Q - Q'}{V^2 \omega}$$

有功功率保持不变。无功功率之差等于补偿电容的无功功率。

例题14

在工频条件下测得某电路的端口电压、电流和功率分别为200 V，3 A和400 W。求此电路的功率因数和串联等效电路。

$$S = VI = 200\ \text{V} \times 3\ \text{A} = 600\ \text{VA}$$

$$P = 400\ \text{W}$$

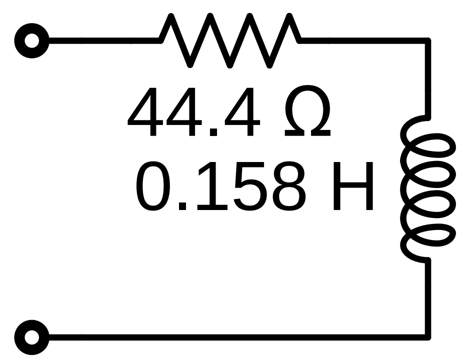
$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{400\ \text{W}}{600\ \text{VA}} = \frac{2}{3}$$

$$\varphi = \arccos\lambda = \arccos\frac{2}{3} = 41.8^\circ$$

$$Z = \frac{V}{I}\angle\varphi = \frac{V}{I}(\lambda + \text{j}\sqrt{1-\lambda^2}) = \frac{200\ \text{V}}{3\ \text{A}}(\frac{2}{3} + \text{j}\frac{\sqrt{5}}{3}) = (44.4 + \text{j}49.7)\ \Omega$$

$$R = 44.4\ \Omega$$

$$L_{\text{eq}} = \frac{49.7}{2\pi \times 50} = 0.158\ \text{H}$$



例题15

感性负载接于220 V 50 Hz市电上，负载的平均功率和功率因数分别为2200 W和0.7。

1. 求负载电流，无功功率和视在功率。

2. 功率因数提高到0.9，需要并联多大的电容？求并联后总负载电流，无功功率和视在功率。

$$I=\frac{P}{V\lambda}=\frac{2200\ \text{W}}{220*0.7}=14.29\ \text{A}$$

$$Q=P\frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$$

$$=2200\ \text{W}\frac{\sqrt{1-0.7^2}}{0.7}=2244\ \text{var}$$

$$S=VI=220\ \text{V}\times 14.29\ \text{A}=3143.8\ \text{VA}$$

$$I'=\frac{P}{V\lambda'}=\frac{2200\ \text{W}}{220*0.9}=11.11\ \text{A}$$

$$Q'=P\frac{\sqrt{1-\lambda'^2}}{\lambda'}$$

$$=2200\ \text{W}\frac{\sqrt{1-0.9^2}}{0.9}=1065\ \text{var}$$

$$S'=VI'=220\ \text{V}\times 11.11\ \text{A}=2444.2\ \text{VA}$$

$$C=\frac{Q-Q'}{V^2\omega}$$

$$=77.5\ \mu\text{F}$$

复功率

复功率等于电压相量与电流相量共轭的乘积。

$$\tilde{S} = \dot{V}\dot{I}^{*} = V\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{v}}} I\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{i}}} = VI\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_{\mathrm{v}}-\varphi_{\mathrm{i}})}$$

$$= VI\left[\cos(\varphi_{\mathrm{v}}-\varphi_{\mathrm{i}}) + \mathrm{j}\sin(\varphi_{\mathrm{v}}-\varphi_{\mathrm{i}})\right]$$

$$= P + \mathrm{j}Q$$

$$\left|\tilde{S}\right| = \left|P + \mathrm{j}Q\right| = \sqrt{P^2 + Q^2} = S$$

$$\arg\tilde{S} = \arctan\left(\frac{Q}{P}\right) = \arctan\left(\frac{VI\sin\varphi}{VI\cos\varphi}\right) = \varphi$$

复功率守恒定律

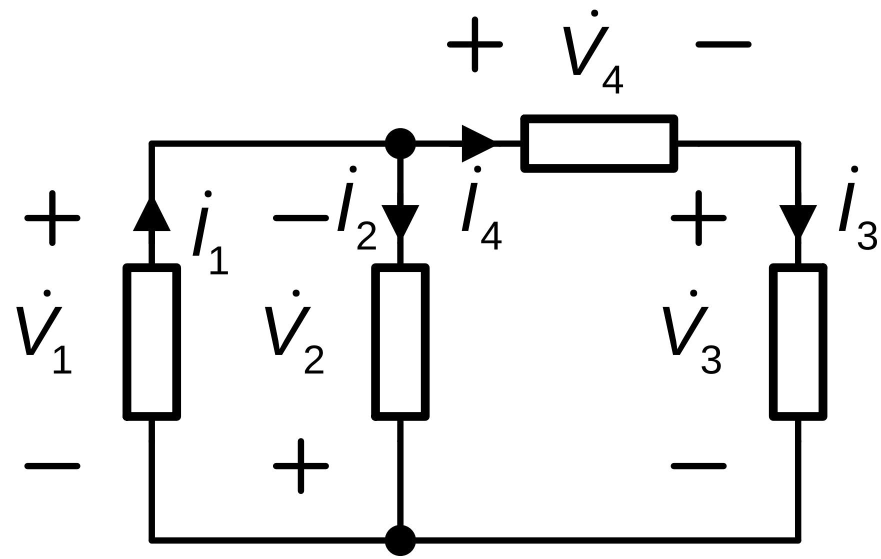
一个电路中各支路吸收复功率的代数和等于零。即，有功功率的代数和等于零；无功功率的代数和也等于零。

$$\sum_{k=1}^{b} \dot{V}_k \dot{I}_k^* = \sum_{k=1}^{b} P_k + j\sum_{k=1}^{b} Q_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{b} P_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{b} Q_k = 0$$

例题16

如图所示电路，电压 $\dot{V}_1 = (1 - \mathrm{j}2)\ \mathrm{V}$, $\dot{V}_3 = (3 + \mathrm{j}4)\ \mathrm{V}$，电流 $\dot{I}_2 = \mathrm{j}2\ \mathrm{A}$, $\dot{I}_4 = (-3 + \mathrm{j})\ \mathrm{A}$。求各元件复功率，并判断元件类型。



元件1“发出”复功率 $\tilde{S}_1 = \dot{V}_1\dot{I}_1^* = \dot{V}_1(\dot{I}_2 + \dot{I}_4)^* = (1 - \mathrm{j}2)(-3 + \mathrm{j}3)^* = (-9 + \mathrm{j}3)\ \mathrm{VA}$

元件1是RC串联

元件2“发出”复功率 $\tilde{S}_2 = \dot{V}_2\dot{I}_2^* = (-\dot{V}_1)\dot{I}_2^* = (-1 + \mathrm{j}2)(\mathrm{j}2)^* = (4 + \mathrm{j}2)\ \mathrm{VA}$

元件2是容性电源，

元件3“吸收”复功率 $\tilde{S}_3 = \dot{V}_3\dot{I}_3^* = \dot{V}_3\dot{I}_4^* = (3 + \mathrm{j}4)(-3 + \mathrm{j})^* = (-5 - \mathrm{j}15)\ \mathrm{VA}$

元件3是容性电源，

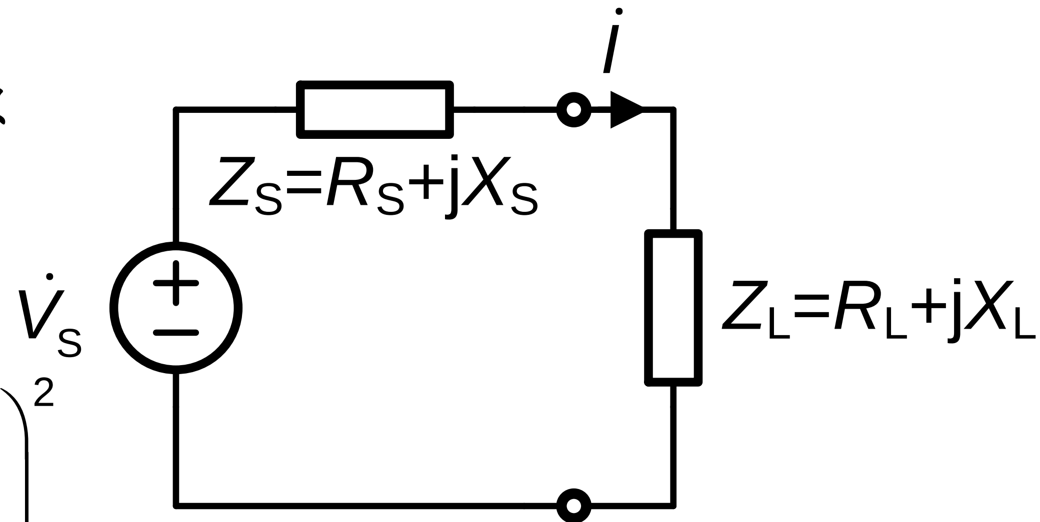
元件4“吸收”复功率 $\tilde{S}_4 = \dot{V}_4\dot{I}_4^* = (\dot{V}_1 - \dot{V}_3)\dot{I}_4^* = (-2 - \mathrm{j}6)(-3 + \mathrm{j})^* = \mathrm{j}20\ \mathrm{VA}$

元件3是电感

复功率守恒 $\tilde{S}_1 + \tilde{S}_2 = \tilde{S}_3 + \tilde{S}_4$

最大功率传输定理

含有内阻的正弦电源给一个负载供电，负载获得的功率



$$P_L = R_L I^2 = R_L\left(\frac{V_S}{\left|Z_S+Z_L\right|}\right)^2$$

$$= \frac{R_L V_S^2}{(R_S+R_L)^2+(X_S+X_L)^2}$$

$$\frac{dP_L}{dX_L}=0,\ \frac{dP_L}{dR_L}=0,\ X_L=-X_S,\ R_L=R_S$$

获得最大功率的条件：

$$Z_L = R_L + jX_L = R_S - jX_S = Z_S^*$$

当负载阻抗等于电源内阻抗的共轭复数时，负载获得最大功率。也称最大功率匹配，或称共轭匹配。

获得的最大功率：

$$P_{L,max} = \frac{V_S^2}{4R_S}$$

负载吸收的功率与电源内阻消耗的功率相等。

负载阻抗角不变，模可变的最大功率

负载阻抗 $Z_{\rm L}=|Z_{\rm L}|e^{j\varphi_{\rm L}}$ 的模$|Z_{\rm L}|$可以改变，而阻抗角$\varphi_{\rm L}$不能改变。

$$P_{\rm L}=\frac{R_{\rm L}V_{\rm S}^2}{(R_{\rm S}+R_{\rm L})^2+(X_{\rm S}+X_{\rm L})^2}$$

$$=\frac{V_{\rm S}^2|Z_{\rm L}|\cos\varphi_{\rm L}}{(|Z_{\rm S}|\cos\varphi_{\rm S}+|Z_{\rm L}|\cos\varphi_{\rm L})^2+(|Z_{\rm S}|\sin\varphi_{\rm S}+|Z_{\rm L}|\sin\varphi_{\rm L})^2}$$

$$=\frac{V_{\rm S}^2\cos\varphi_{\rm L}}{|Z_{\rm S}|^2/|Z_{\rm L}|+|Z_{\rm L}|+2|Z_{\rm S}|\cos(\varphi_{\rm S}-\varphi_{\rm L})}$$

获得最大功率的条件：

$$\frac{\mathrm{d}\left(1/P_{\mathrm{L}}\right)}{\mathrm{d}\left|Z_{\mathrm{L}}\right|}=0,\ \left|Z_{\mathrm{L}}\right|=\left|Z_{\mathrm{S}}\right|$$

当只有负载阻抗的模可以改变时，负载获得最大功率的条件是负载阻抗的模等于电源内阻抗的模。

获得的最大功率：

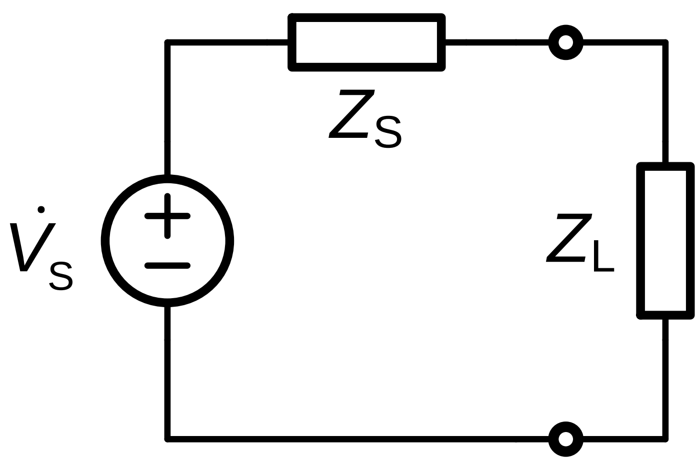
$$P_{\mathrm{L,max}}=\frac{V_{\mathrm{S}}^{2}\cos\varphi_{\mathrm{L}}}{2\left|Z_{\mathrm{S}}\right|\left[1+\cos\left(\varphi_{\mathrm{S}}-\varphi_{\mathrm{L}}\right)\right]}$$

例题17

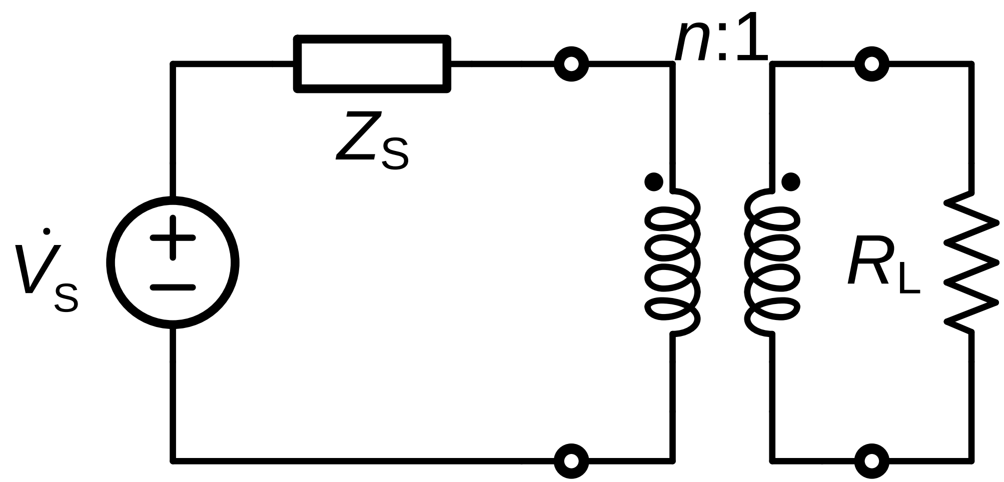
如图所示，源电压 $\dot{V}_S = 12\angle 0°$ V，内阻抗 $Z_S = (4 + j3)\ \Omega$

1. 图(a)中负载阻抗任意，求负载获得的最大功率。

2. 图(b)中通过理想变压器接一电阻负载，R_L = 20 Ω，问变比n为多少时，负载R_L可以获得最大功率。



(a)



(b)

1. 当$Z_{\mathrm{L}}=Z_{\mathrm{S}}^{*}=(4-\mathrm{j}3)\ \Omega$ 时，负载获得最大功率$P_{\mathrm{L,max}}=\dfrac{V_{\mathrm{S}}^{2}}{4R_{\mathrm{L}}}=\dfrac{(12\ \mathrm{V})^{2}}{4\times 4\Omega}=9\ \mathrm{W}$

2. 戴维南等效电路 $\dot{V}_{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{n}\dot{V}_{\mathrm{S}},\ Z_{EQ}=\dfrac{1}{n^{2}}Z_{\mathrm{S}}$

当 $R_{\mathrm{L}}=|Z_{\mathrm{EQ}}|,\ \ 20\ \Omega=\dfrac{1}{n^{2}}|4+\mathrm{j}3|,\ \ n=1/2$

$$\dot{I}_{\mathrm{L}}=\frac{\dot{V}_{\mathrm{OC}}}{Z_{\mathrm{EQ}}+R_{\mathrm{L}}}=\frac{\frac{1}{n}\dot{V}_{\mathrm{S}}}{\frac{1}{n^{2}}Z_{\mathrm{S}}+R_{\mathrm{L}}}=\frac{n\dot{V}_{\mathrm{S}}}{Z_{\mathrm{S}}+n^{2}R_{\mathrm{L}}}=\frac{12\angle 0^{\circ}/2}{4+\mathrm{j}3+20/4}=\frac{3-\mathrm{j}}{5}=\frac{\sqrt{10}}{5}\angle -18.4^{\circ}$$

负载获得的最大功率

$$P_{\mathrm{L,max}}=I^{2}R_{\mathrm{L}}=\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\ \mathrm{A}\right)^{2}20\ \Omega=8\ \mathrm{W}$$