

电路基础

(Fundamentals of Electric Circuits, INF0120002.05)

2019年04月02日

唐长文 教授

zwtang@fudan.edu.cn

<http://rfic.fudan.edu.cn/Courses.htm>

复旦大学/微电子学院/射频集成电路设计研究小组

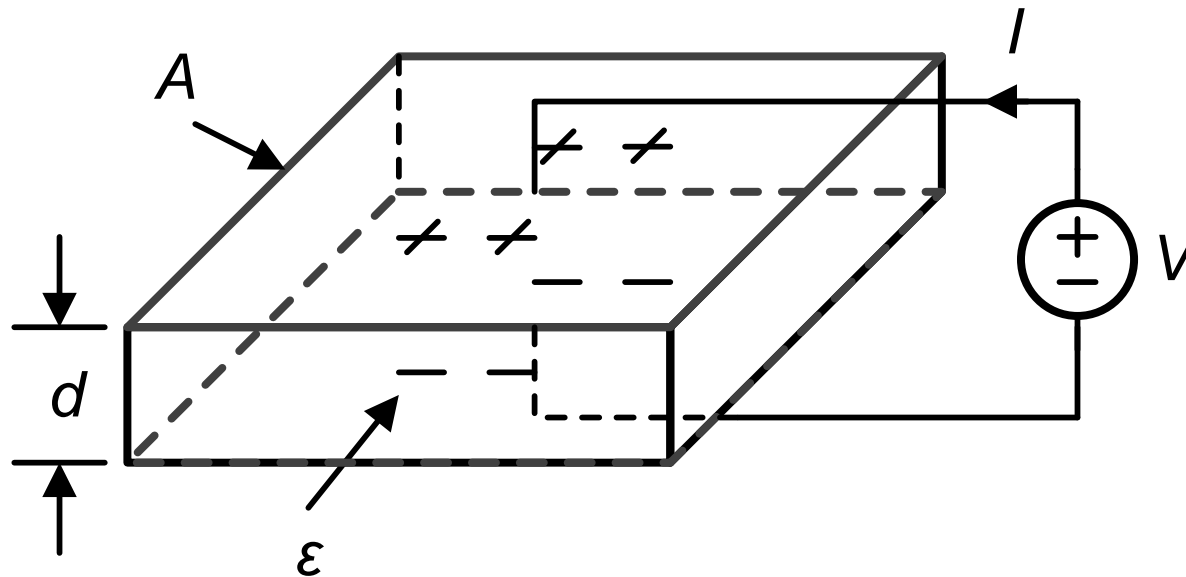
版权©2019， 版权保留， 侵犯必究

第五章 电容和电感

- 电容元件
- 电感元件
- 耦合电感
- 理想变压器

电容元件

电容构成原理：



电容

- 电容是储能元件：储存电荷和电场能
- 线性电路：电容 C 是常量

$$q = Cv$$

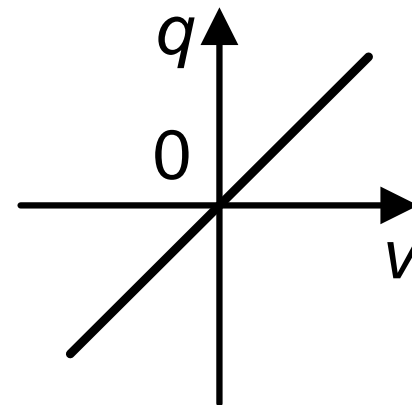
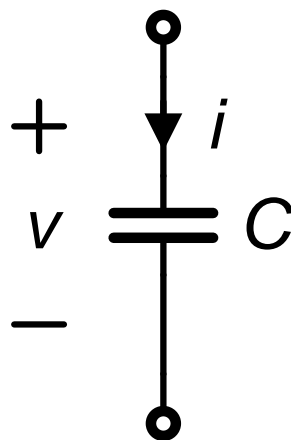
C : 电容[系数]

单位: F(法拉)

常用单位:

μF (微法, 10^{-6} F)

pF (皮法, 10^{-12} F)



v 和 i 取关联参考方向， C 是正值。

电容的电压电流关系

- 关联参考方向：
 - 电流流入正极板方向

- 流经电容的电流：

- 极板电荷的变化率

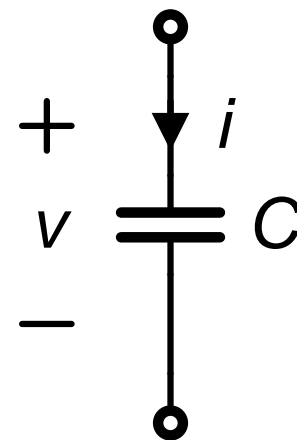
$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt}$$

- 动态元件：

- 端口电流与电压的时间变化率成正比

- 隔断直流：

- 电压不随时间变化（直流）时，电流为零，相当于开路。



电容的电压电流关系

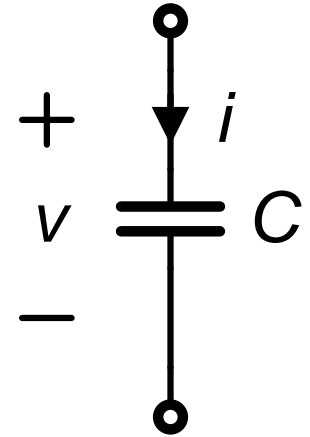
- 电荷 q 等于电流 i 对时间的积分
 - t 时刻的电荷量：该时刻以前电流的充放电积累的结果
- 记忆元件：
 - 当前电压与 t_0 时刻电压有关

$$\begin{aligned}q(t) &= \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi & v(t) &= v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{t_0} i(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi \\ &= q(t_0) + \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi\end{aligned}$$

电容的功率与能量

- 关联参考方向，吸收的功率：

$$p = vi = Cv \frac{dv}{dt}$$



- 从 $t = -\infty$ 到 t 时刻吸收的能量：

$$\begin{aligned} W_C(t) &= \int_{-\infty}^t v(\xi) i(\xi) d\xi = C \int_{v(-\infty)}^{v(t)} v(\xi) dv(\xi) \\ &= \frac{1}{2} Cv^2(t) - \frac{1}{2} Cv^2(-\infty) \end{aligned}$$

认为当 $t = -\infty$ 时， $v(-\infty) = 0$ $W_C(t) = \frac{1}{2} Cv^2(t)$

电容的功率与能量

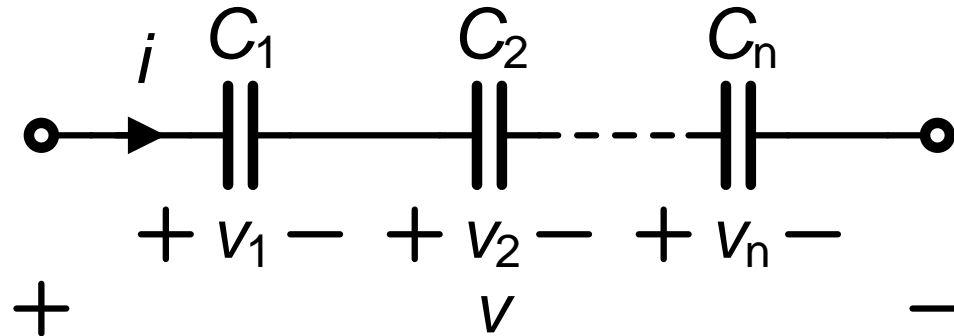
- 从 t_1 到 t_2 时刻，吸收的能量：

$$\begin{aligned}\Delta W_C &= C \int_{v(t_1)}^{v(t_2)} v dv = \frac{1}{2} C v^2(t_2) - \frac{1}{2} C v^2(t_1) \\ &= W_C(t_2) - W_C(t_1)\end{aligned}$$

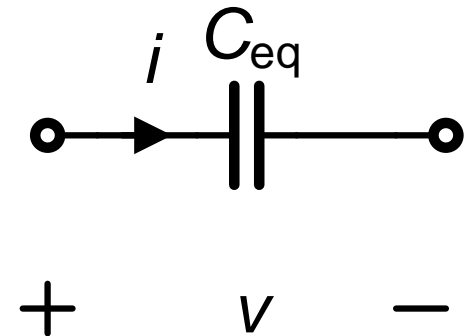
- 充电时吸收能量： $|v(t_2)| > |v(t_1)|$ ， $W_C(t_2) > W_C(t_1)$
- 放电时释放电能： $|v(t_2)| < |v(t_1)|$ ， $W_C(t_2) < W_C(t_1)$
- 储能元件：
 - 不消耗电能，能量以电场形式存储
- 无源元件：
 - 不发出额外的能量

电容的串联

串联电容



等效电容



- 根据KVL

$$V = V_1 + \dots + V_n = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t id\xi + \dots + \frac{1}{C_n} \int_{-\infty}^t id\xi$$

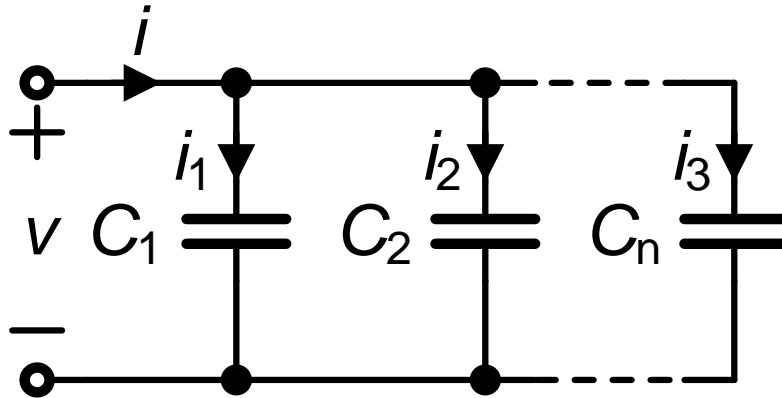
$$= \frac{1}{C_{eq}} \int_{-\infty}^t id\xi$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

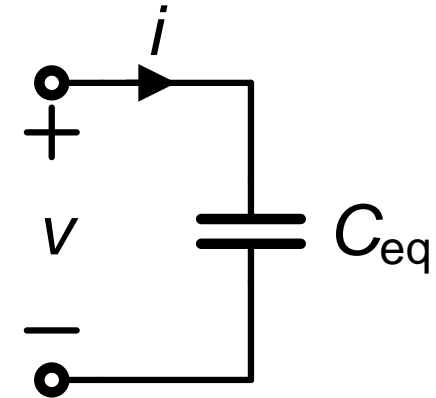
串联等效电容的倒数等于各电容倒数之和。

电容的并联

并联电容



等效电容



- 根据KCL

$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \cdots + C_n \frac{dv}{dt} = C_{eq} \frac{dv}{dt}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

并联等效电容等于各电容之和。

例题1

如图所示，已知 $C_1 = 1 \text{ F}$ ， $C_2 = 2 \text{ F}$ ， $R_1 = 4 \Omega$ ， $R_2 = 6 \Omega$ ， $R_3 = 12 \Omega$ ， $I_S = 1 \text{ A}$ ，电路处于直流工作状态，计算两个电容各自存储的电场能量。

在直流电路中电容相当于开路：

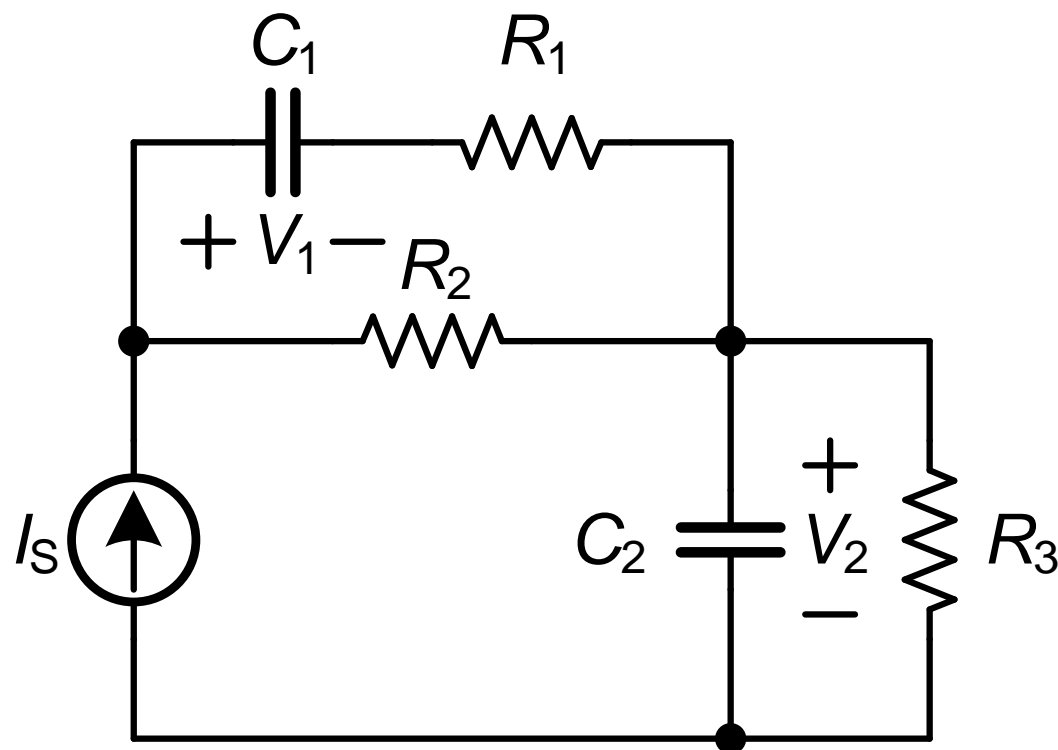
$$V_1 = I_S R_2 = 1 \times 6 = 6 \text{ V}$$

$$V_2 = I_S R_3 = 1 \times 12 = 12 \text{ V}$$

两个电容储存的电场能量：

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = 18 \text{ J}$$

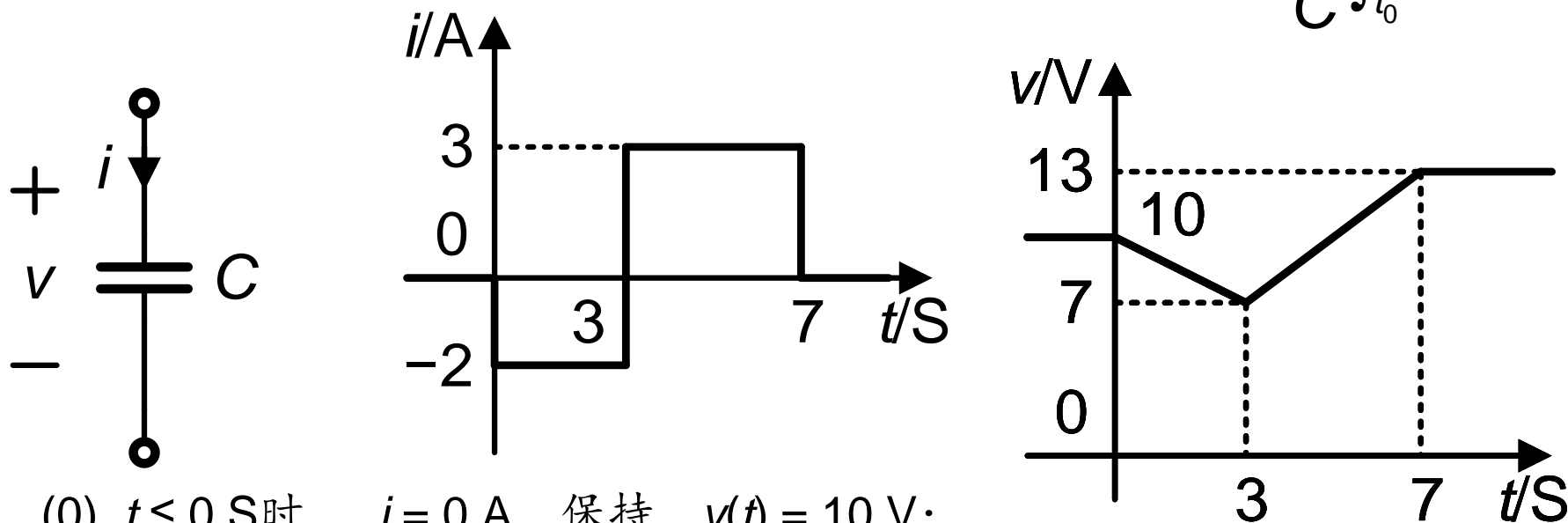
$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 = 144 \text{ J}$$



例题2

如流过电容 $C = 2 \text{ F}$ 的电流波形如下，设 $v(0) = 10 \text{ V}$ ，
计算电容电压的变化波形。

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\xi) d\xi$$



(0) $t \leq 0 \text{ S}$ 时， $i = 0 \text{ A}$ ，保持， $v(t) = 10 \text{ V}$ ；

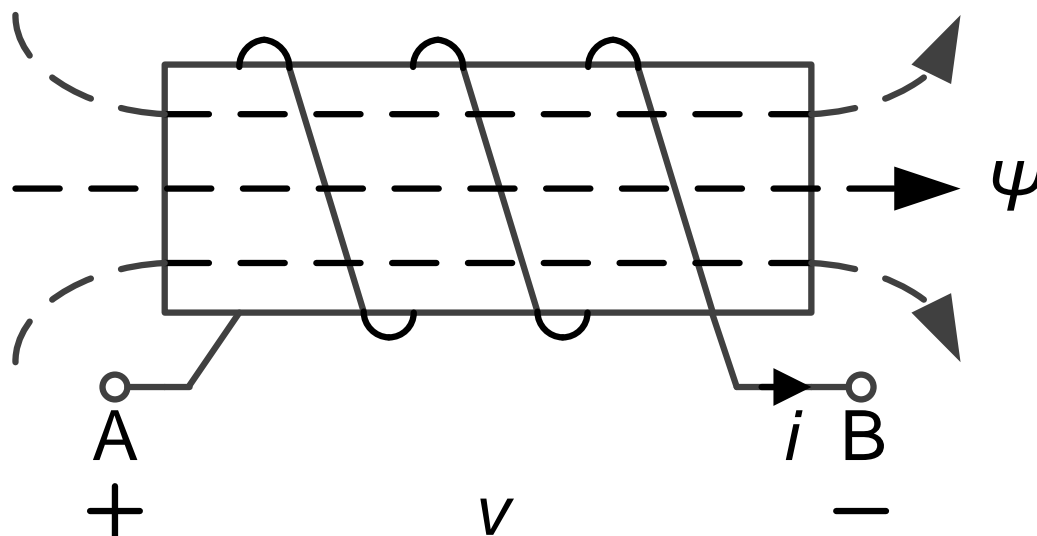
(1) $0 \leq t \leq 3 \text{ S}$ 时， $i = -2 \text{ A}$ ，放电， $v(t) = 10 - t \text{ V}$ ；

(2) $3 \text{ S} \leq t \leq 7 \text{ S}$ 时， $i = 3 \text{ A}$ ，充电， $v(t) = 2.5 + 1.5t \text{ V}$ ；

(3) $7 \text{ S} \leq t$ 时， $i = 0 \text{ A}$ ，保持， $v(t) = 13 \text{ V}$ 。

电感元件

磁通量和感应电压



自感磁通链 Ψ : 由线圈电流 i 产生

感应电压: 右手螺旋关系 (楞次定律)

$$v = \frac{d\Psi}{dt}$$

电感

- 电感是储能元件：储存磁链和磁场能
- 线性电感：电感 L 是常量

$$\psi = Li$$

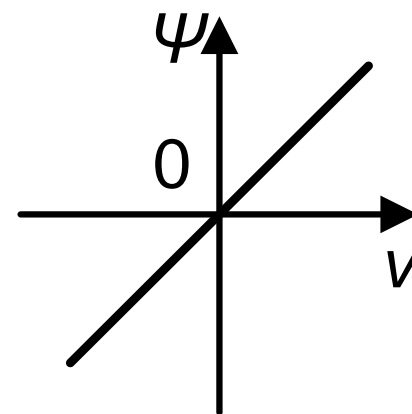
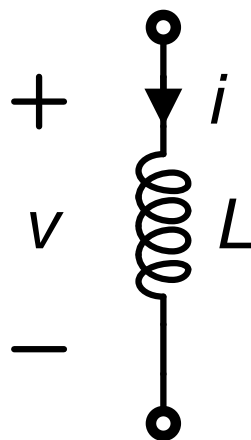
L : 电感[系数]

单位: H(亨利)

常用单位:

nH(纳亨, 10^{-9} H)

μ H(微亨, 10^{-6} H)



v 和 i 取关联参考方向， L 是正值。

电感的电压电流关系

- 关联参考方向：

- 电流流入正极板方向

- 电感的电压：

- 极板电荷的变化率

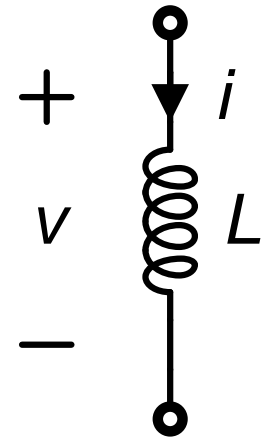
$$v = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

- 动态元件：

- 端口电压与电流的时间变化率成正比

- 隔断交流：

- 电流不随时间变化（直流）时，电压为零，相当于短路。



电感的电压电流关系

- 磁链 Ψ 等于电压 v 对时间的积分
 - t 时刻的磁链：该时刻以前电压的积累的结果
- 记忆元件：
 - 当前电流与 t_0 时刻电流有关

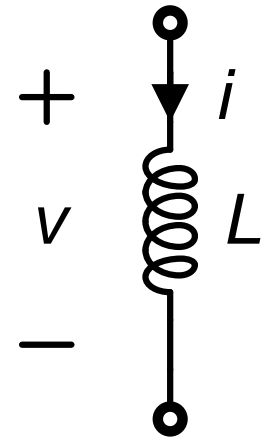
$$\begin{aligned}\psi(t) &= \int_{-\infty}^t v(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{t_0} v(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t v(\xi) d\xi \\ &= \psi(t_0) + \int_{t_0}^t v(\xi) d\xi\end{aligned}$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\xi) d\xi$$

电感的功率与能量

- 关联参考方向，吸收的功率：

$$p = vi = Li \frac{di}{dt}$$



- 从 $t = -\infty$ 到 t 时刻吸收的能量：

$$\begin{aligned} W_L(t) &= \int_{-\infty}^t v(\xi) i(\xi) d\xi = L \int_{i(-\infty)}^{i(t)} i di \\ &= \frac{1}{2} Li^2(t) - \frac{1}{2} Li^2(-\infty) \end{aligned}$$

认为当 $t = -\infty$ 时， $i(-\infty) = 0$ $W_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t)$

电感的功率与能量

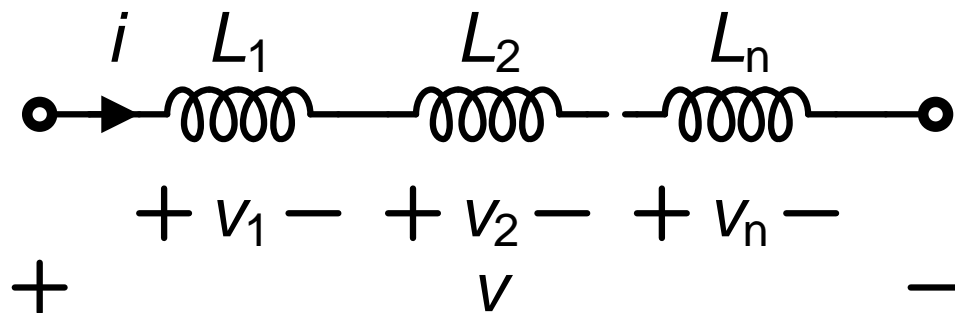
- 从 t_1 到 t_2 时刻，吸收的能量：

$$\begin{aligned}\Delta W_L &= L \int_{i(t_1)}^{i(t_2)} i di = \frac{1}{2} Li^2(t_2) - \frac{1}{2} Li^2(t_1) \\ &= W_L(t_2) - W_L(t_1)\end{aligned}$$

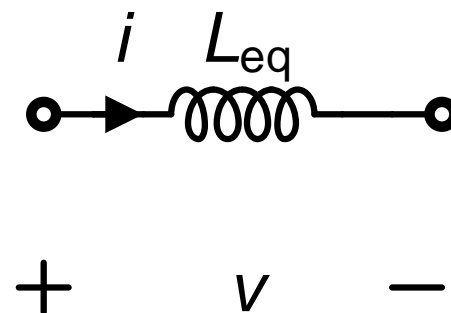
- 充电时吸收能量： $|i(t_2)| > |i(t_1)|$ ， $W_L(t_2) > W_L(t_1)$
- 放电时释放电能： $|i(t_2)| < |i(t_1)|$ ， $W_L(t_2) < W_L(t_1)$
- 储能元件：
 - 不消耗电能，能量以磁场形式存储
- 无源元件：
 - 不发出额外的能量

电感的串联

串联电感



等效电感



- 根据KVL

$$V = V_1 + \dots + V_n = L_1 i dt + \dots + L_n i dt$$

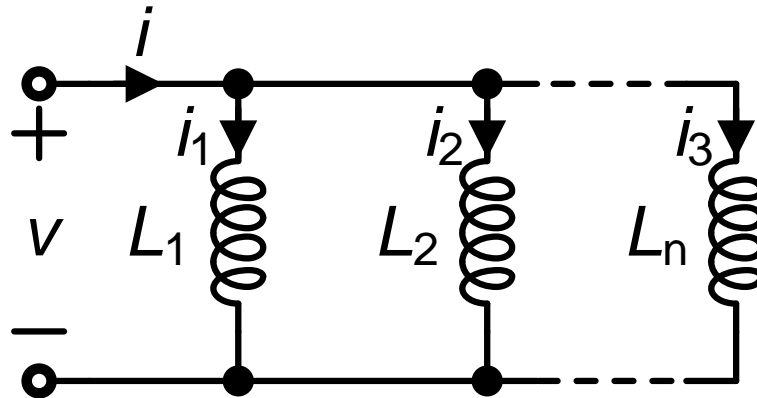
$$= L_{eq} i dt$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

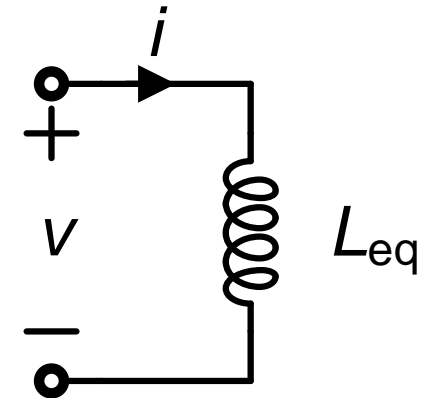
串联等效电感等于各电感之和。

电感的并联

并联电感



等效电感



- 根据KCL

$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_n = \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^t v(\xi) d\xi + \cdots + \frac{1}{L_n} \int_{-\infty}^t v(\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{L_{eq}} \int_{-\infty}^t v(\xi) d\xi \quad \frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$

并联等效电感的倒数等于各电感倒数之和。

例题3

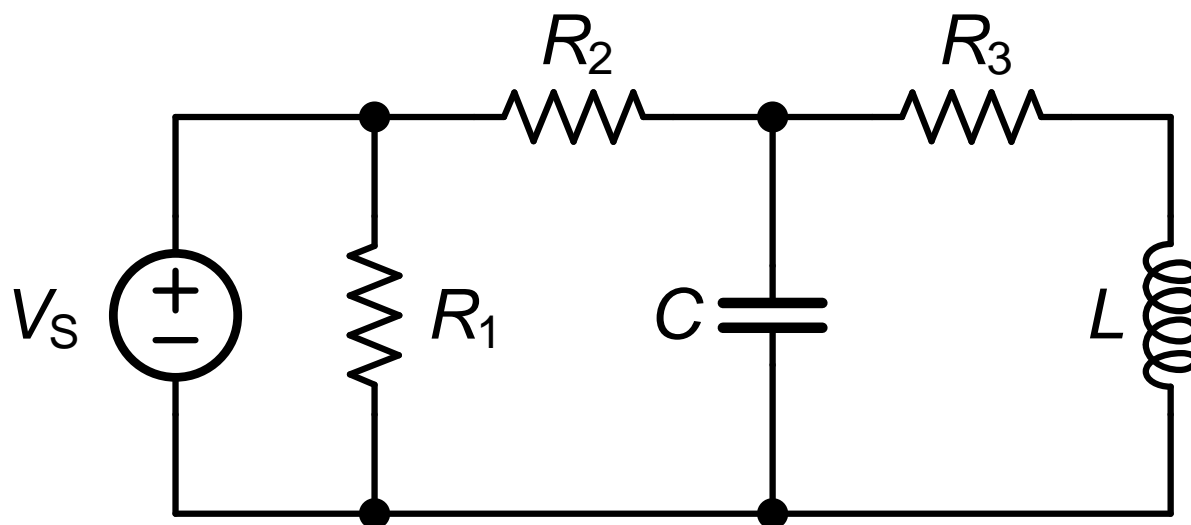
如图所示，已知 $R_1 = 3 \Omega$ ， $R_2 = 2 \Omega$ ， $R_3 = 4 \Omega$ ， $V_S = 6 \text{ V}$ ， $C = 1 \text{ F}$ ， $L = 2 \text{ H}$ ，求电容和电感各自存储的能量。

$$i_L = \frac{V_S}{R_2 + R_3} = 1 \text{ A}$$

$$v_C = i_L R_3 = 4 \text{ V}$$

$$W_C = \frac{1}{2} C v_C^2 = 8 \text{ J}$$

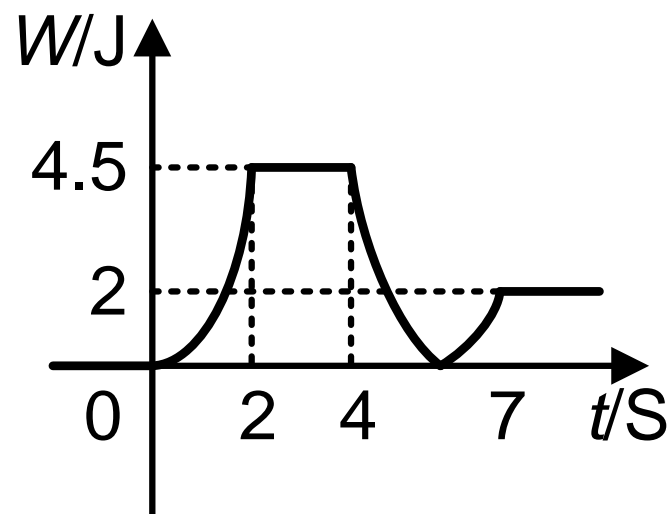
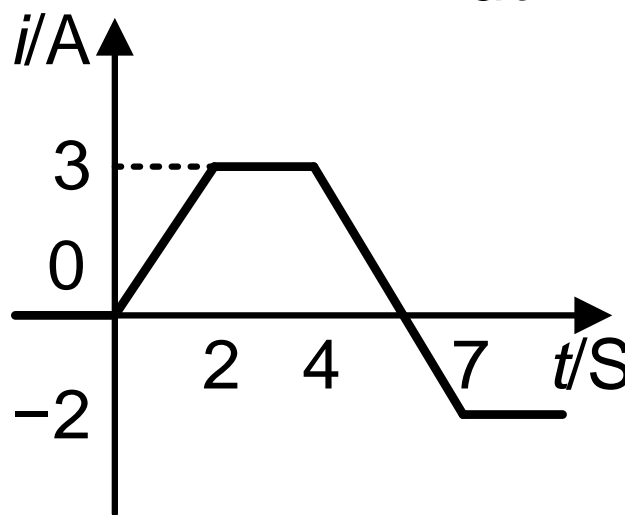
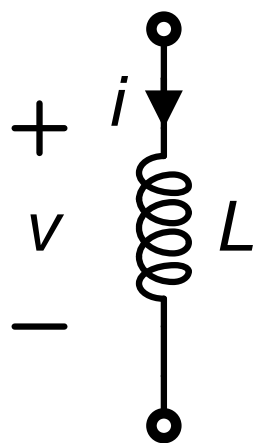
$$W_L = \frac{1}{2} L i_L^2 = 1 \text{ J}$$



例题4

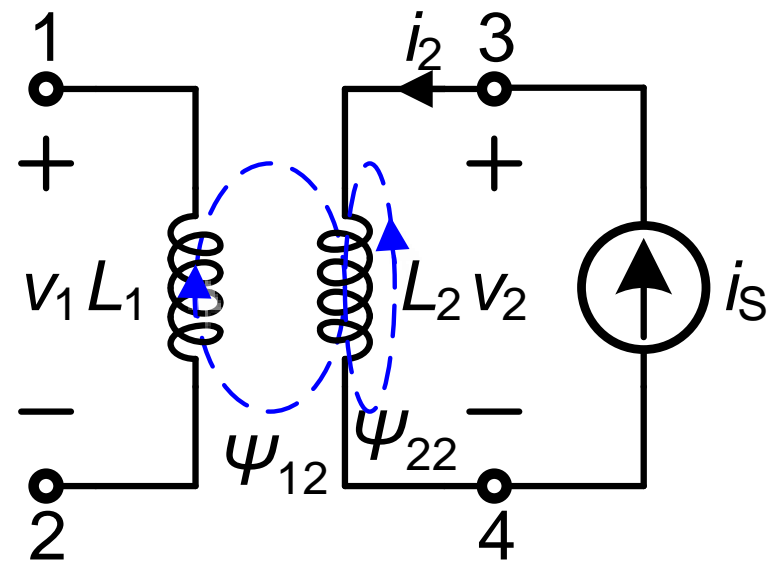
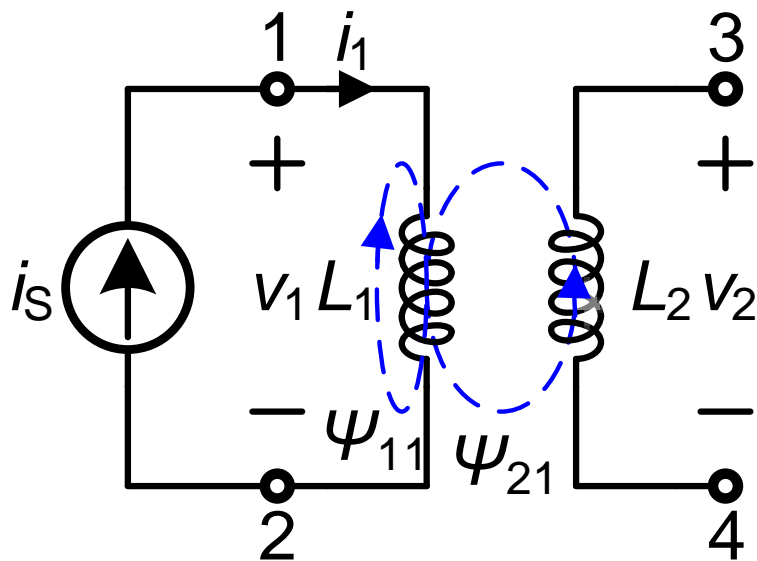
如图所示，已知流过电感 $L = 1 \text{ H}$ 的电流波形，求时间 $t > 0$ 时电感电压、吸收功率及储存能量的变化规律。

$$v = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt}, \quad p = vi, \quad W = \frac{1}{2} Li^2$$



耦合电感

- 多端口电感：几个线圈之间存在着磁耦合
- 二端口电感：习惯上称为互感(元件)



耦合电感的磁链

- 总磁链：自感磁链和互感磁链的代数和
- 自感磁链和互感磁链均正比与激发它们的电流
- 电流与自感磁链的参考方向符合右手螺旋关系

$$\begin{cases} \Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = L_{11}i_1 \pm L_{12}i_2 \\ \Psi_2 = \pm \Psi_{21} + \Psi_{22} = \pm L_{21}i_1 + L_{22}i_2 \end{cases}$$

互感磁链前正负号：由自感磁链和互感磁链的方向而定，一致取“+”，否则取“-”。

耦合电感的磁链

$$\begin{cases} \Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = L_{11}i_1 \pm L_{12}i_2 \\ \Psi_2 = \pm \Psi_{21} + \Psi_{22} = \pm L_{21}i_1 + L_{22}i_2 \end{cases}$$

自感磁通链 Ψ_{11} Ψ_{22}

互感磁通链 Ψ_{12} Ψ_{21}

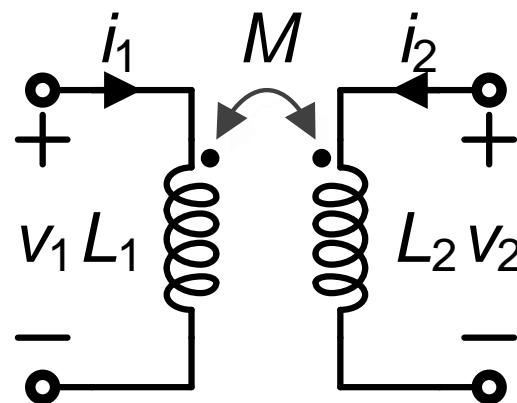
自感 L_{11} L_{22} 一般简写为 L_1 , L_2

互感 L_{12} L_{21} 通常实际线圈, $L_{12} = L_{21} = M$

$$\begin{cases} \Psi_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \\ \Psi_2 = \pm M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

耦合电感的同名端与异名端

- 互感磁通的符号+/-:
 - 取决于线圈的相对绕向和电流的流向
 - 根据电流进/出同名端的方向来判断
- 同名端:
 - 带有黑点的两个端子
 - 用来表示两个线圈的相对绕向
- 异名端
 - 黑点端子与非黑点端子



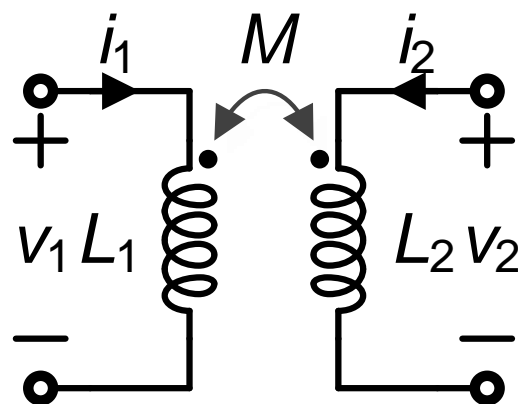
耦合电感的电路符号

耦合电感的同名端与异名端

- 两个端口电流都流进(或流出)同名端
 - 它们所激发的自感磁链和互感磁链方向一致
 - 总磁链在原自感磁链基础上增强
 - 互感磁链前应取正号
- 两个端口电流都流进(或流出)异名端
 - 它们所激发的自感磁链与互感磁链方向相反
 - 总磁链在原自感磁链基础上削弱
 - 互感磁链前应取负号

耦合电感的电压电流关系

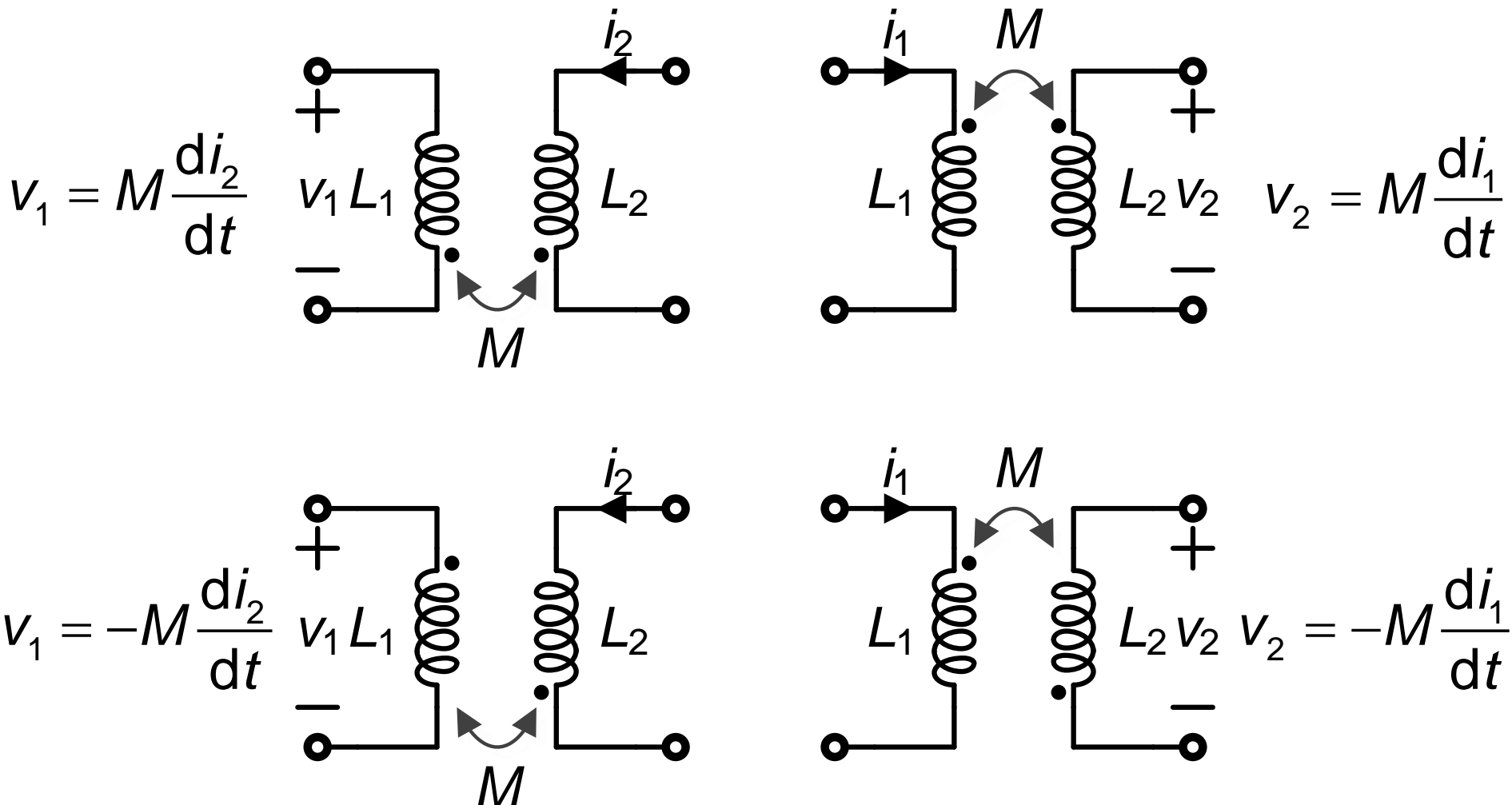
- 自感磁通与电流符合右手螺旋关系
- 端口电压与电流为关联参考方向



$$\begin{cases} v_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = \pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

例题5

如图所示，电流已知，请写出电压表达式。



耦合电感的功率和能量

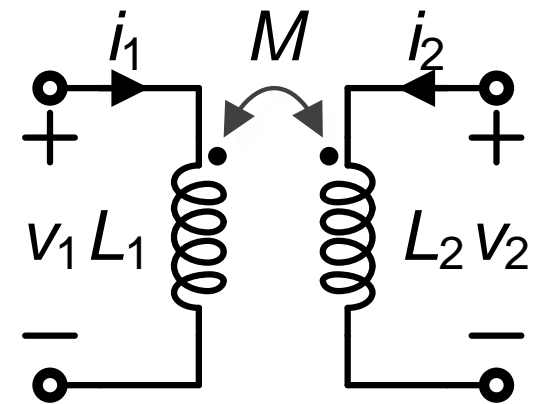
- 关联参考方向, 消耗的总功率为:

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 = \left(L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt} \right) i_1 + \left(\pm M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \right) i_2$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) \pm \frac{d}{dt} (M i_1 i_2) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \pm M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right)$$

$$= \frac{dW_m}{dt}$$



耦合电感的功率和能量

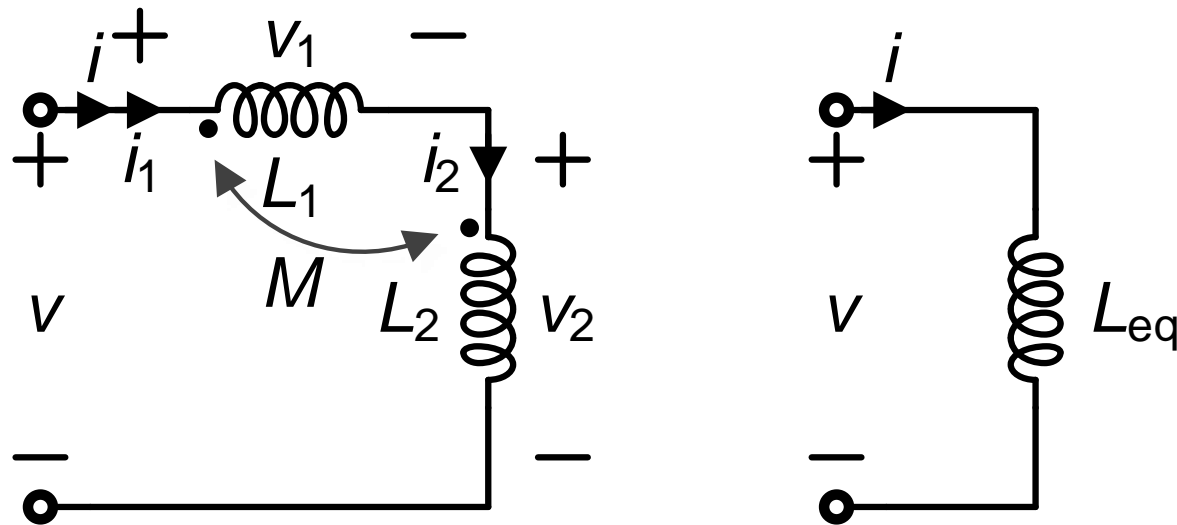
- 耦合电感的吸收能量将全部转化为磁场能量

$$\dot{W}_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \pm M i_1 i_2$$

- 没有磁耦合：
 - $M = 0$ ，磁场能量是两个自感元件储能之和
- 存在磁耦合：
 - 要增/减一项 $M i_1 i_2$
 - 增/减视互感的作用是使磁场增强还是使磁场减弱而定

耦合电感的串联：正串

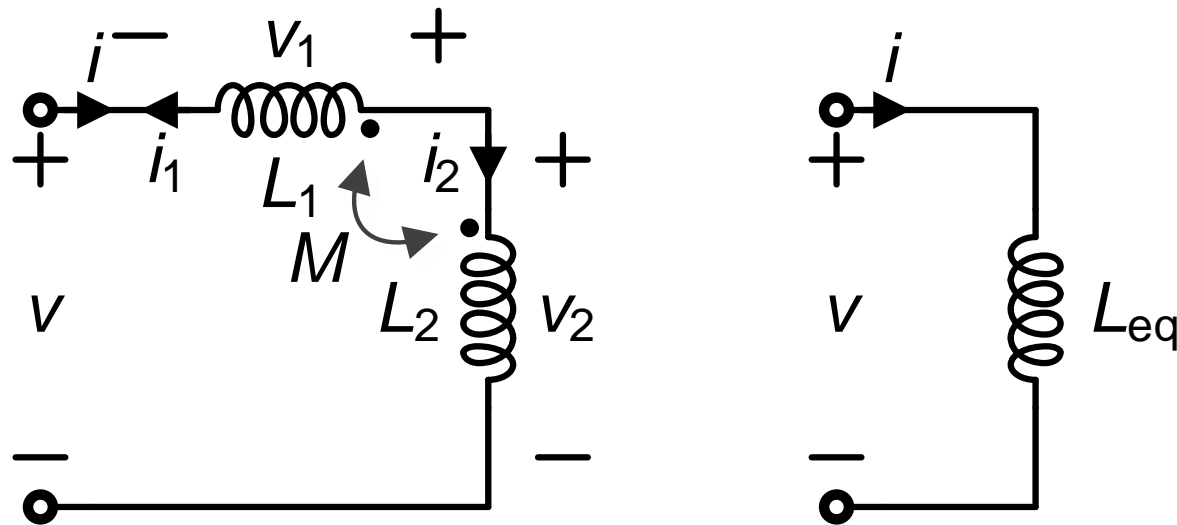
正串：电流从同名端流入



$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + V_2 = \left(L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \right) + \left(M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} \right) \\
 &= (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} = L_{\text{eq}} \frac{di}{dt} \quad \longrightarrow \quad L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + 2M
 \end{aligned}$$

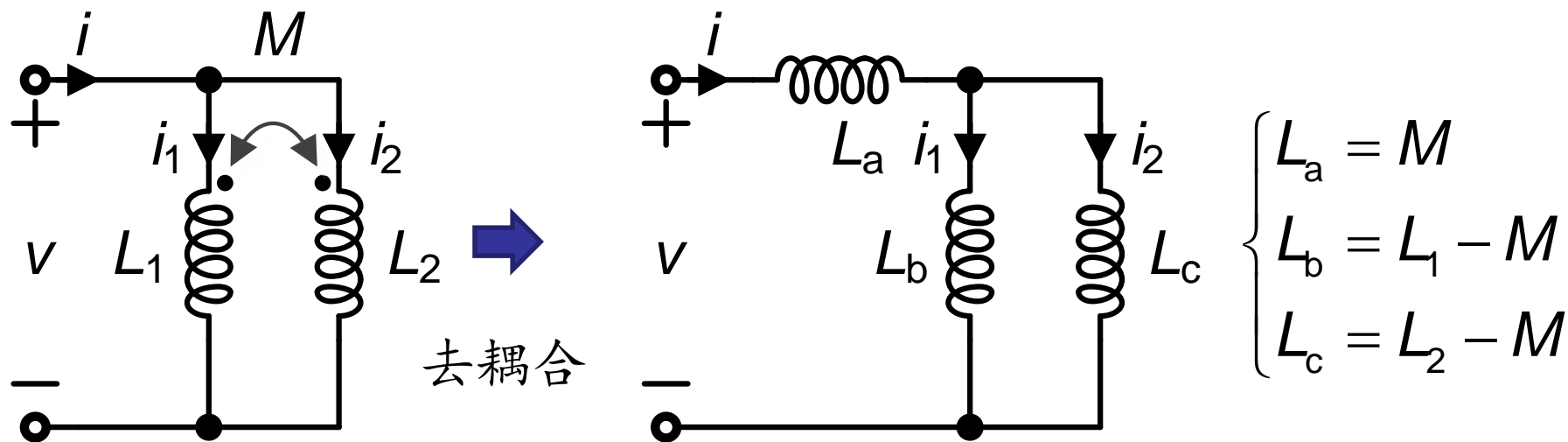
耦合电感的串联：反串

反串：电流从异名端流入



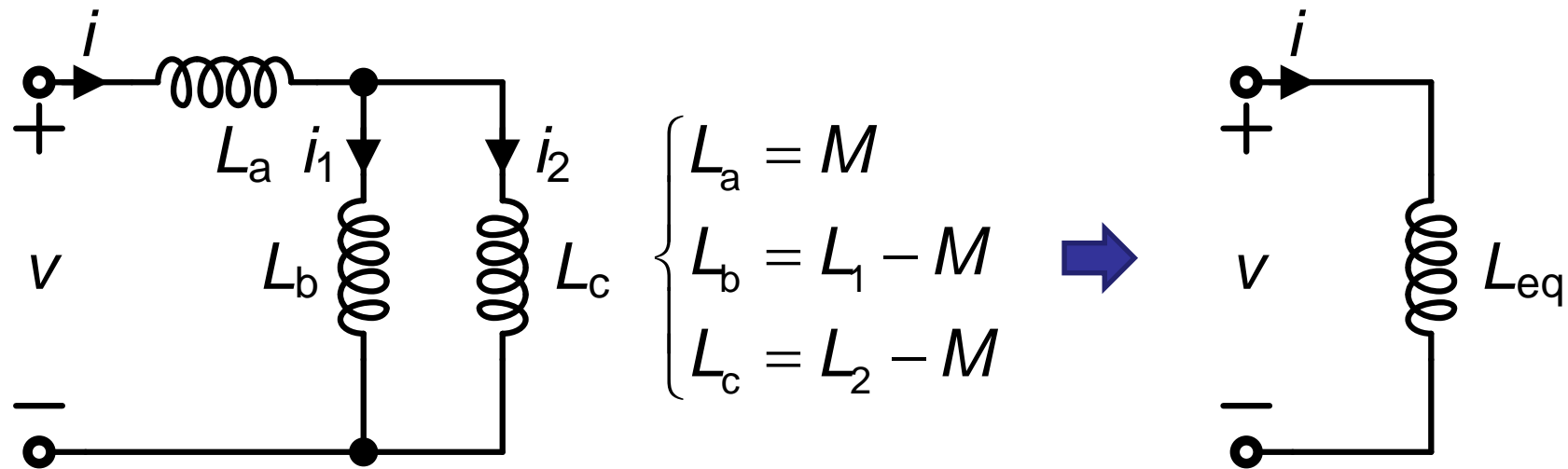
$$\begin{aligned}
 V &= -V_1 + V_2 = -\left(L_1 \frac{d(-i)}{dt} + M \frac{di}{dt}\right) + \left(M \frac{d(-i)}{dt} + L_2 \frac{di}{dt}\right) \\
 &= (L_1 + L_2 - 2M) \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M
 \end{aligned}$$

耦合电感的并联：同名端并联



$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ v = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v = M \frac{di}{dt} + (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} = L_a \frac{di}{dt} + L_b \frac{di_1}{dt} \\ v = M \frac{di}{dt} + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} = L_a \frac{di}{dt} + L_c \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

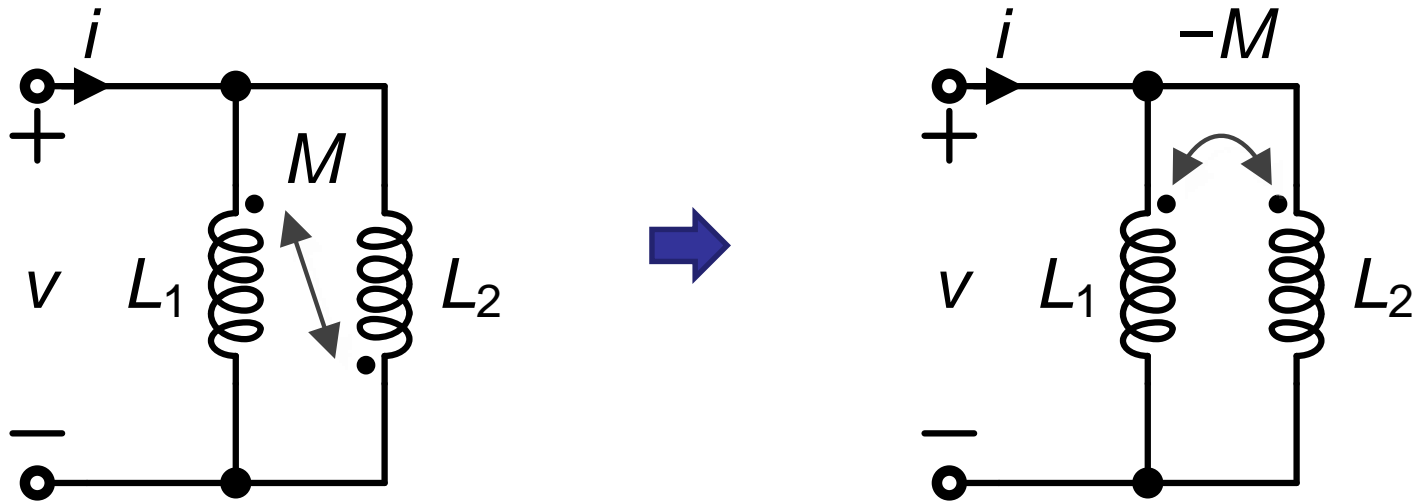
耦合电感的并联：同名端并联



根据电感的串/并联等效

$$L_{\text{eq}} = L_a + \frac{L_b L_c}{L_b + L_c} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

耦合电感的并联：异名端并联



$$L_{\text{eq}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

耦合系数

- 耦合系数

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

- 衡量耦合的程度

- $0 \leq k \leq 1$

- $k = 1$: 全耦合

- $k = 0$: 两线圈无磁耦合

耦合系数

- 实际的耦合线圈

- 无论何种串联或何种并联，等效电感均为正值
- 自感和互感满足如下关系：

$$M \leq \frac{1}{2}(L_1 + L_2) \quad M \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

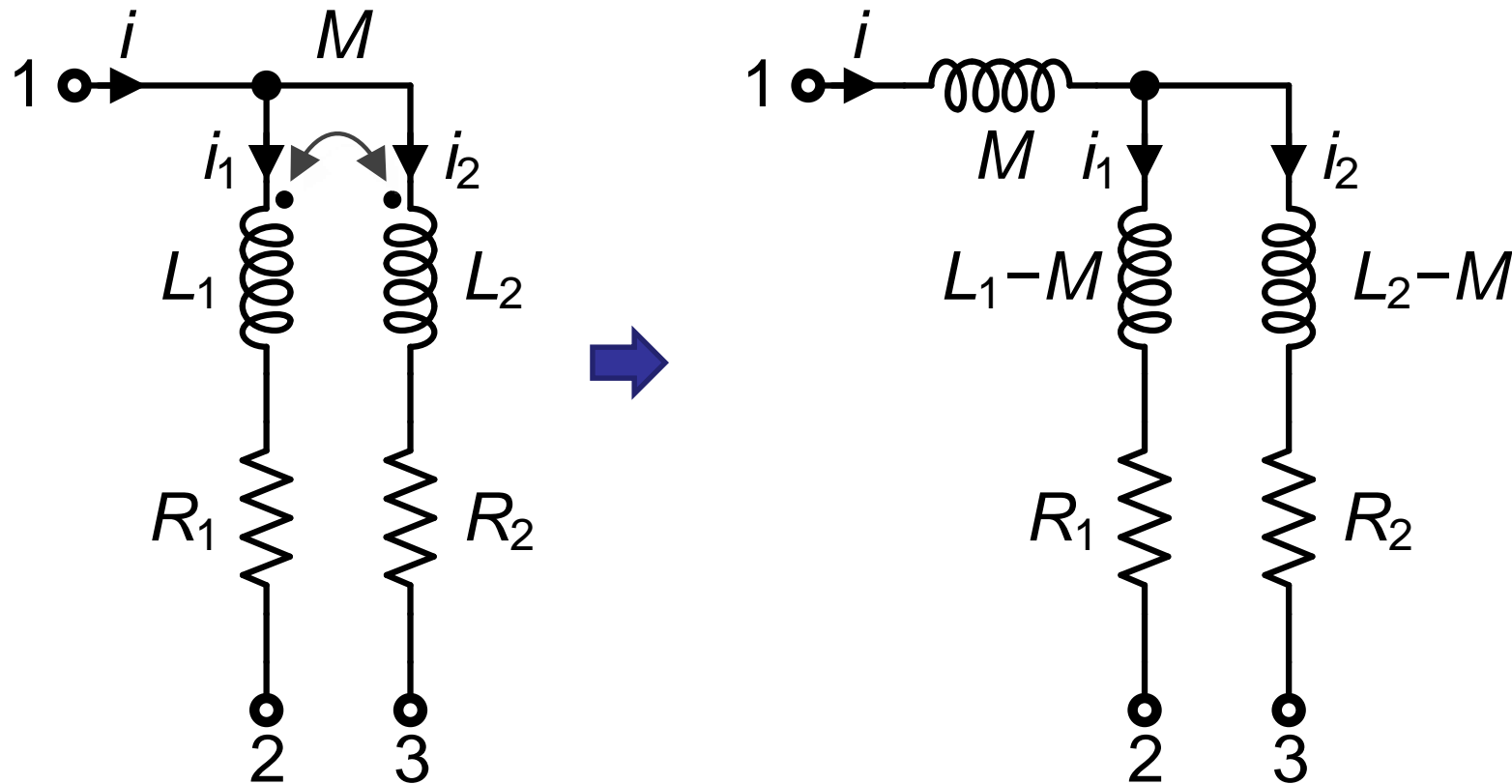
- 耦合系数满足

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$$

$$L_{\text{eq}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

$$L_{\text{eq}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

含电阻的耦合电感的去耦合等效



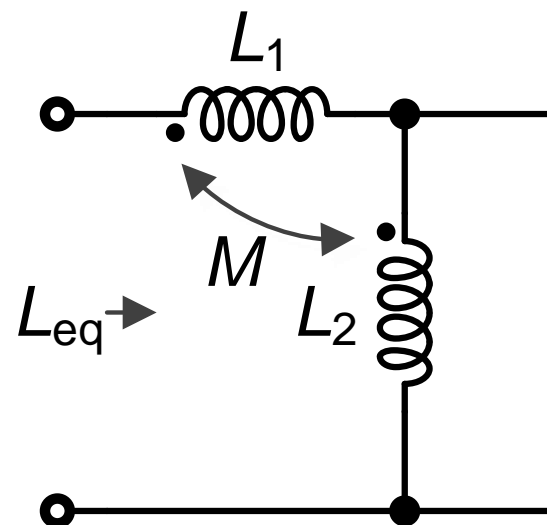
例题6

如图所示，求等效电感值 L_{eq} 。

$$\begin{cases} v = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

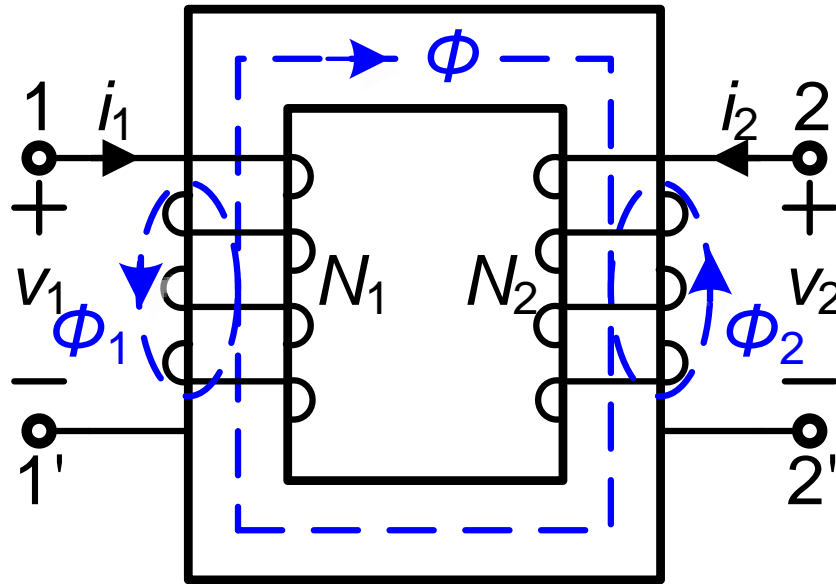
$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{M}{L_2} \frac{di}{dt}$$

$$v = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{di}{dt}$$



$$L_{\text{eq}} = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$$

理想变压器



变压器示意图

• 理想变压器的假设

- 铁心的磁导率： $\mu \rightarrow \infty$

- 每个线圈的漏磁通为零，两个线圈全耦合，则

有磁链与铁心内磁通的关系为： $\Psi_1 = N_1 \Phi$ $\Psi_2 = N_2 \Phi$

理想变压器的端口方程

- 理想变压器的假设

- 线圈电阻为零，关联参考方向，右手螺旋法则

$$\begin{cases} v_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi}{dt} \\ v_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi}{dt} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \\ v_1 = nv_2 \end{cases}$$

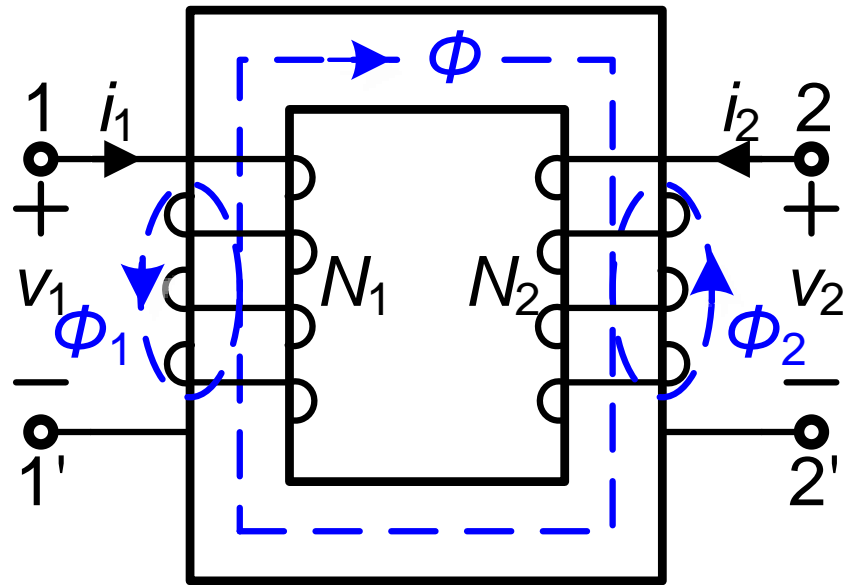
$$\int_l Hdl = N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0$$



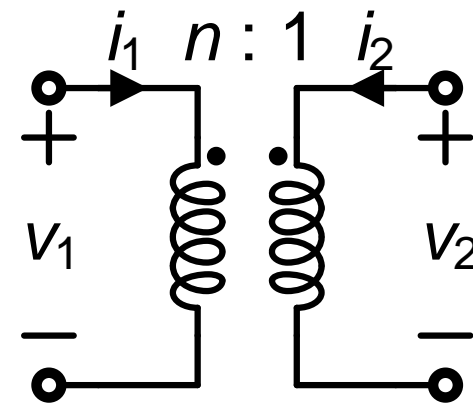
$$\begin{cases} \frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} = -\frac{1}{n} \\ i_1 = -\frac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

n : 变比(匝数比)

理想变压器的符号



变压器示意图

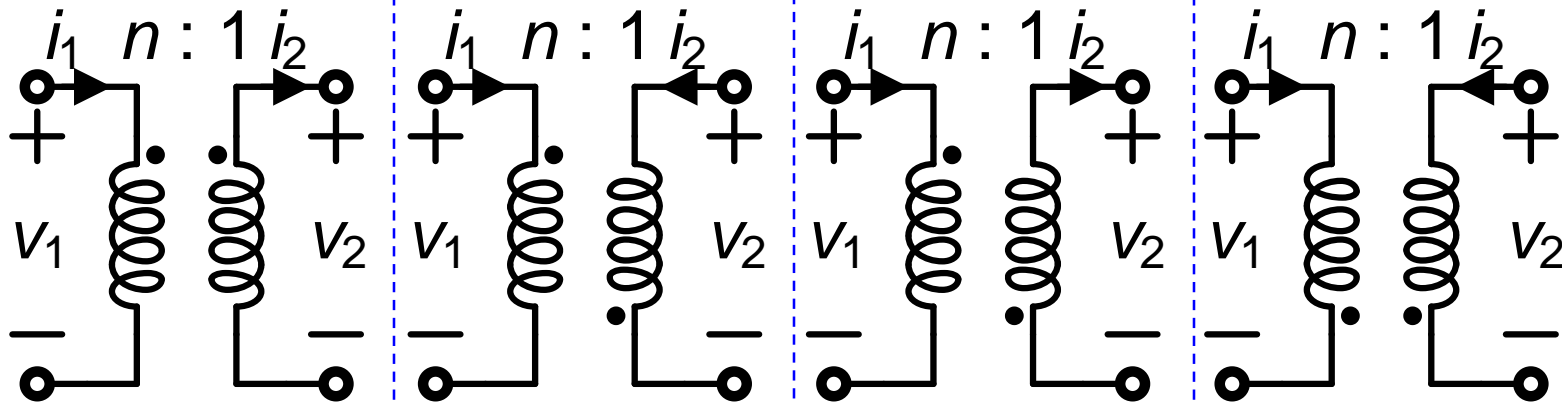


理想变压器符号

V_1 和 V_2 的参考方向相对星标是相同的，否则要改变符号。
 i_1 和 i_2 的参考方向相对星标是相同的，否则要改变符号。

例题7

如图所示，请写出电压/电流的表达式。



$$\begin{cases} v_1 = nv_2 \\ i_1 = \frac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = -nv_2 \\ i_1 = \frac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = -nv_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = nv_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

理想变压器的功率

$$\begin{aligned} p &= v_1 i_1 + v_2 i_2 = (n v_2) \left(-\frac{i_2}{n}\right) + v_2 i_2 \\ &= -v_2 i_2 + v_2 i_2 = 0 \end{aligned}$$

- 非储能元件
 - 无源元件
 - 每一瞬间输入功率等于输出功率
 - 传输过程中既无能量损耗，也无能量存储

理想变压器特性

- 电压电流特性
 - 电压和电流之间没有直接的关系

$$V_1 = nV_2 \quad i_1 = -\frac{1}{n}i_2$$

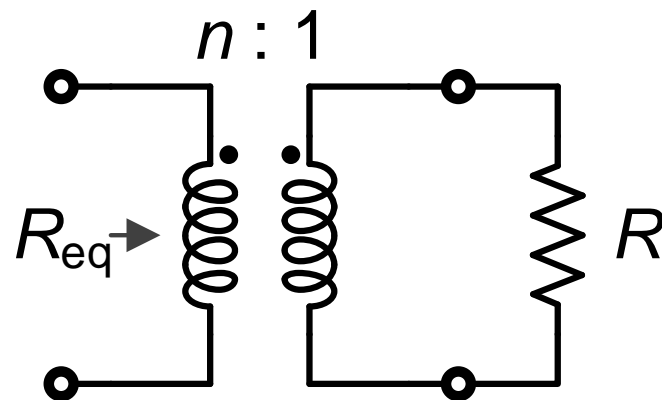
- 能量特性 $p=0$
- 只限于交流：
 - 电压/电流必须是变化的

例题8

如图所示，求等效电阻 R_{eq} 。

$$R_{\text{eq}} = \frac{V}{i} = \frac{nV_2}{-i_2/n}$$

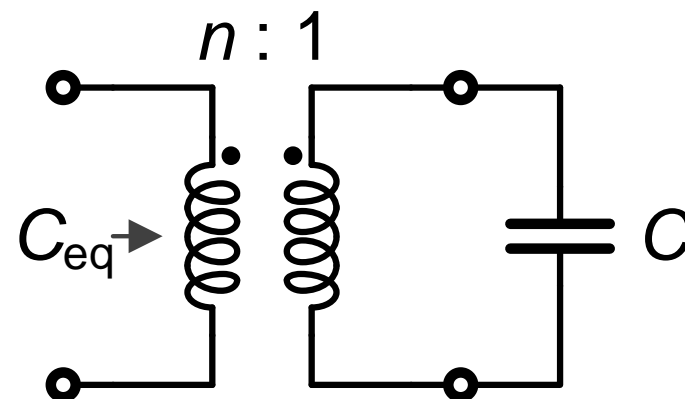
$$= n^2 \frac{V_2}{-i_2} = n^2 R$$



理想变压器具有电阻变换功能。

例题9

如图所示，求等效电容 C_{eq} 。



$$C_{eq} = \frac{i}{dv/dt} = \frac{-i_2 / n}{d(nv_2)/dt}$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{-i_2}{dv_2/dt} = \frac{1}{n^2} C$$

$$\frac{1}{2} C_{eq} v^2 = \frac{1}{2} C v_2^2$$

$$C_{eq} = C \frac{v_2^2}{v^2} = \frac{C}{n^2}$$