电路基础
(Fundamentals of Electric Circuits, INF0120002.07)

2019年03月21日

唐长文 教授

zwtang@fudan.edu.cn

http://rfic.fudan.edu.cn/Courses.htm

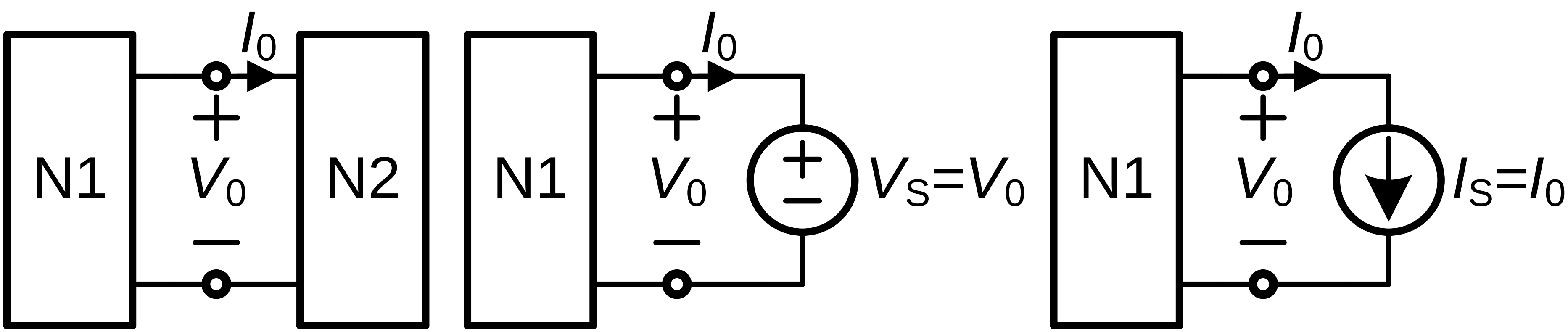
复旦大学/微电子学院/射频集成电路设计研究小组

第四章 电路定理

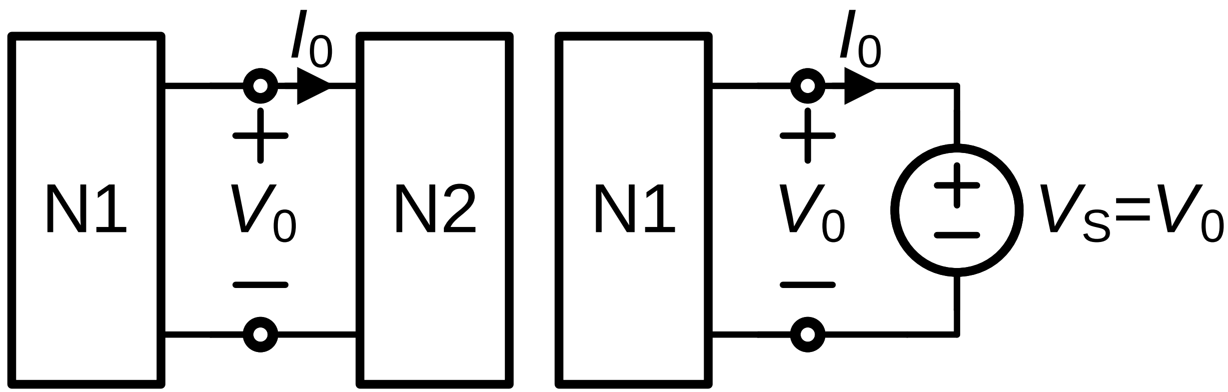
- 置换定理
- 叠加定理
- 等效电源定理
- 最大功率传输定理
- 特勒根定理
- 互易定理
- 对偶原理

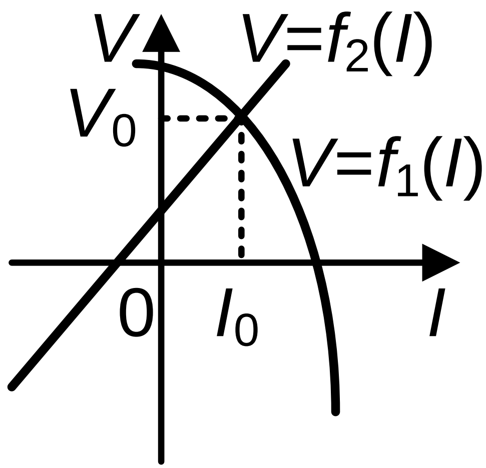
置换定理

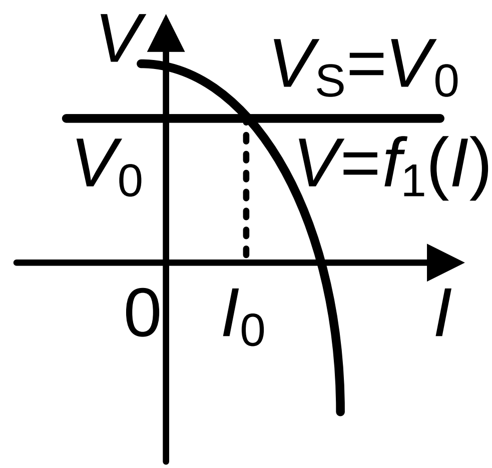
若某一端口的电压和电流为V_0和I_0，可以用$V_S = V_0$的电压源或者$I_S = I_0$的电流源来置换此一端口，而不影响电路中其它部分的电压和电流。



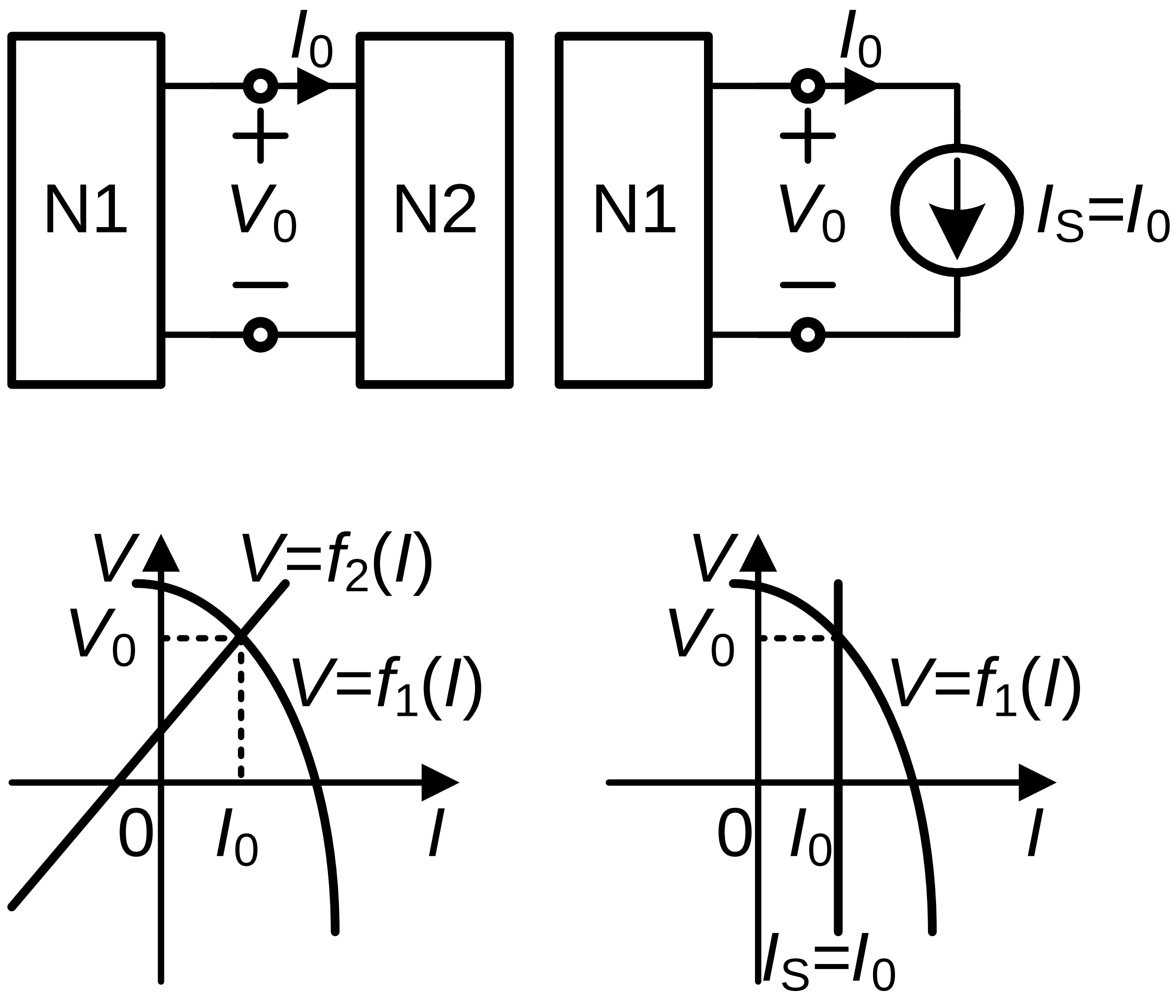
置换为电压源



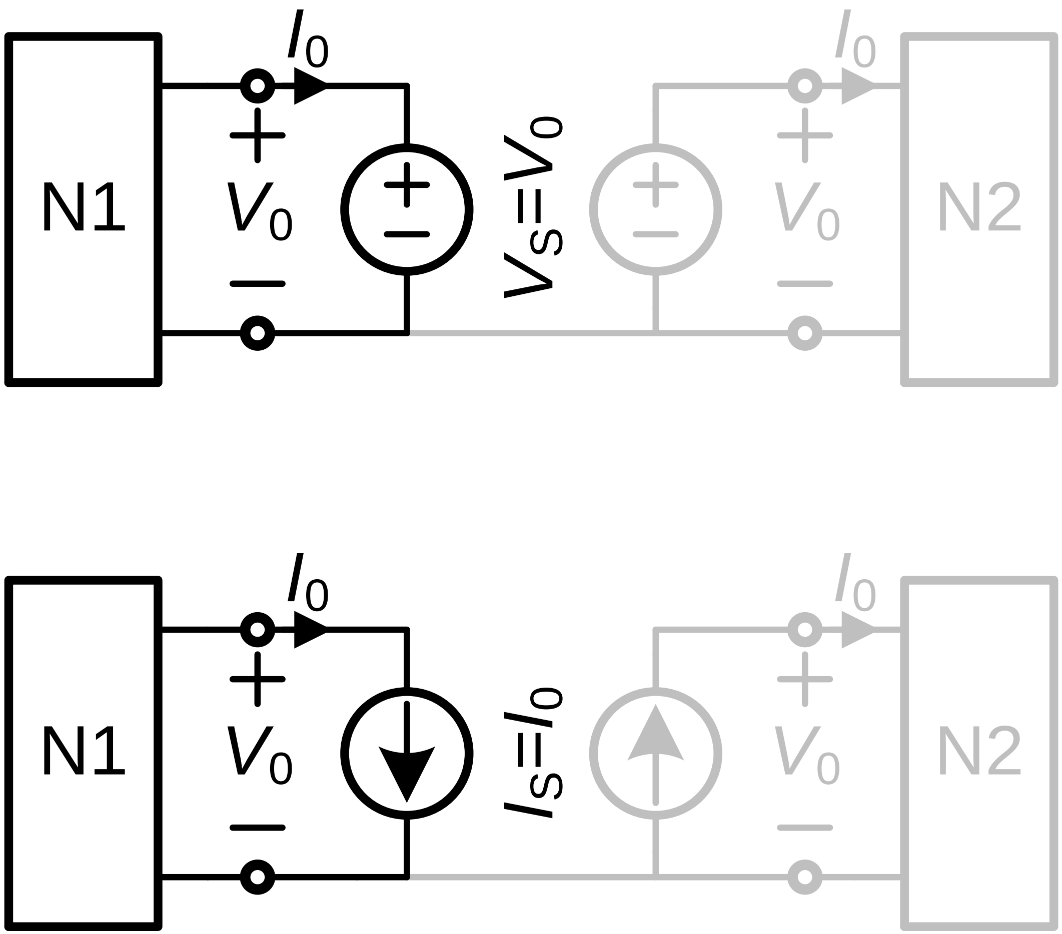




置换为电流源



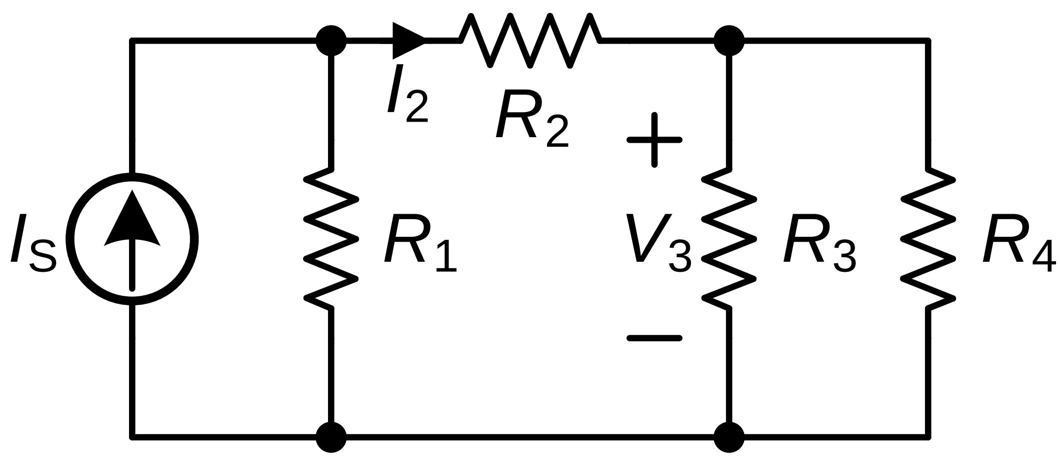
论证



例题1

如图所示，已知$R_1 = 3\ \Omega$，$R_2 = 1\ \Omega$，$R_4 = 3\ \Omega$，$I_S = 2\ A$，$V_3 = 2\ V$，求电阻R_3和电流I_2。

1. 置换
2. 回路电流方程



$$\begin{cases} (R_1 + R_2) I_{m1} - 0 \times I_{m2} = R_1 I_S - V_3 \\ -0 \times I_{m1} + R_4 I_{m2} = V_3 \end{cases}$$

$I_2 = I_{m1} = 1\ A$, $I_{m2} = 2/3\ A$, $R_3 = (2\ V)/(1\ A - 2/3\ A) = 6\ \Omega$

叠加定理

叠加定理：在线性电路中，由几个独立电源共同作用产生的响应等于各个独立电源单独作用时产生相应响应的代数和。

几点注意：

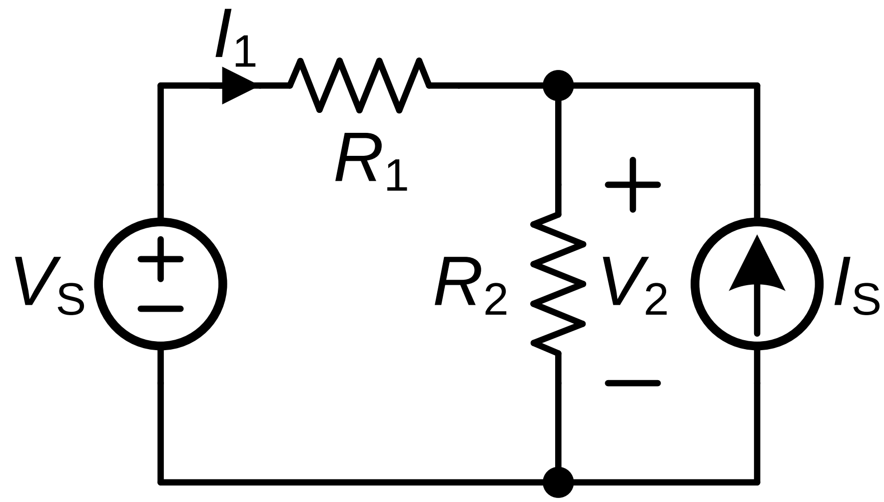
每个独立电源单独作用时，其它独立电源置零。电压源短路，电流源开路。

受控电源保留在各分电路中。

功率不满足叠加特性。

例题2

如图所示，求电流I_1和电压V_2。



回路电流方程

$$(R_1+R_2)I_{m1}=V_S-R_2I_S$$

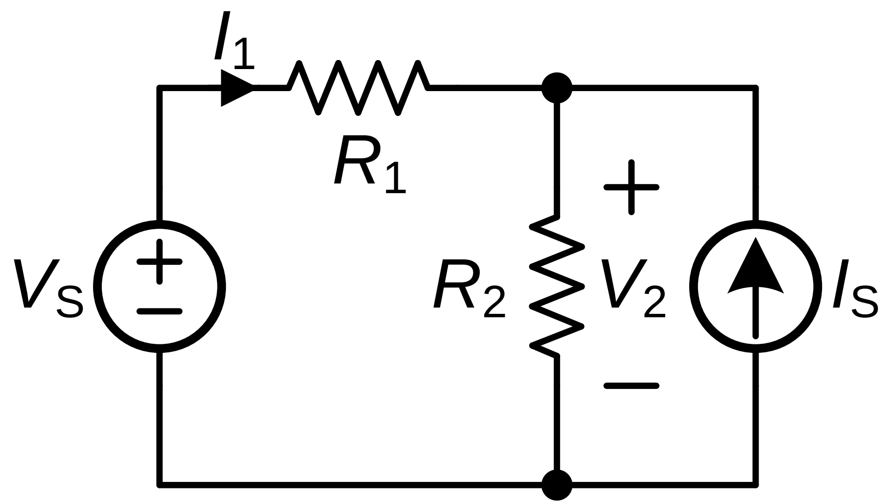
$$I_1=I_{m1}=\frac{1}{R_1+R_2}V_S-\frac{R_2}{R_1+R_2}I_S$$

节点电压方程

$$(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})V_{n1}=\frac{V_S}{R_1}+I_S$$

$$V_2=V_{n1}=\frac{R_2}{R_1+R_2}V_S+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}I_S$$

每个独立电源单独作用



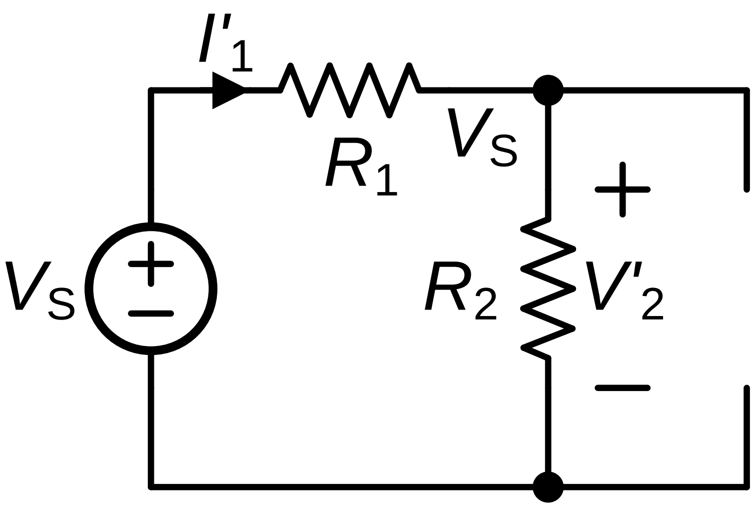
$$I_1' = \frac{1}{R_1 + R_2} V_S$$

$$V_2' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_S$$

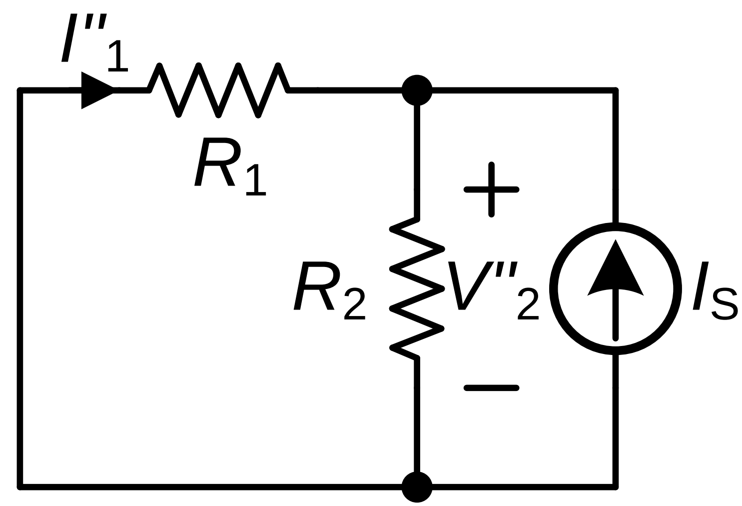
$$I_1'' = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} I_S$$

$$V_1'' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_S$$

=



+



例题3

如图所示，已知$R_1 = 2\ \Omega$，$R_2 = 1\ \Omega$，$r = 3\ \Omega$， $V_S = 3\ V$，$I_S = 3\ A$，求电压V_2。

叠加定理

1. 电压源V_S单独作用

$$(R_1+R_2)I_{m1}=V_S-rI_{m1}$$

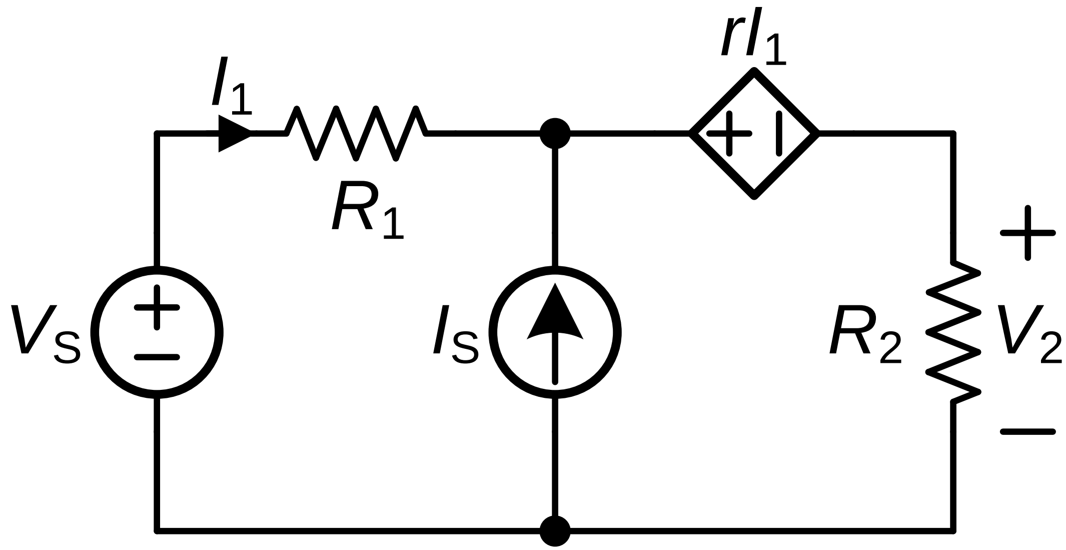
$$I_1^{'}=I_{m1}=\frac{1}{R_1+R_2+r}V_S$$

$$V_2^{'}=\frac{R_2}{R_1+R_2+r}V_S$$

2. 电流源I_S单独作用

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)V_{n1}=I_S+\frac{rI_1^{''}}{R_2}=I_S-\frac{r}{R_2}\frac{V_{n1}}{R_1}$$

$$V_{n1}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2+r}I_S,\quad V_2^{''}=V_{n1}-rI_1^{''}=V_{n1}+r\frac{V_{n1}}{R_1}=\frac{(R_1+r)R_2}{R_1+R_2+r}I_S$$



$V'_2 = 0.5\ V$，$V''_2 = 2.5\ V$，$V_2 = 3\ V$

思考

- 复杂的电路有必要使用叠加定理吗？

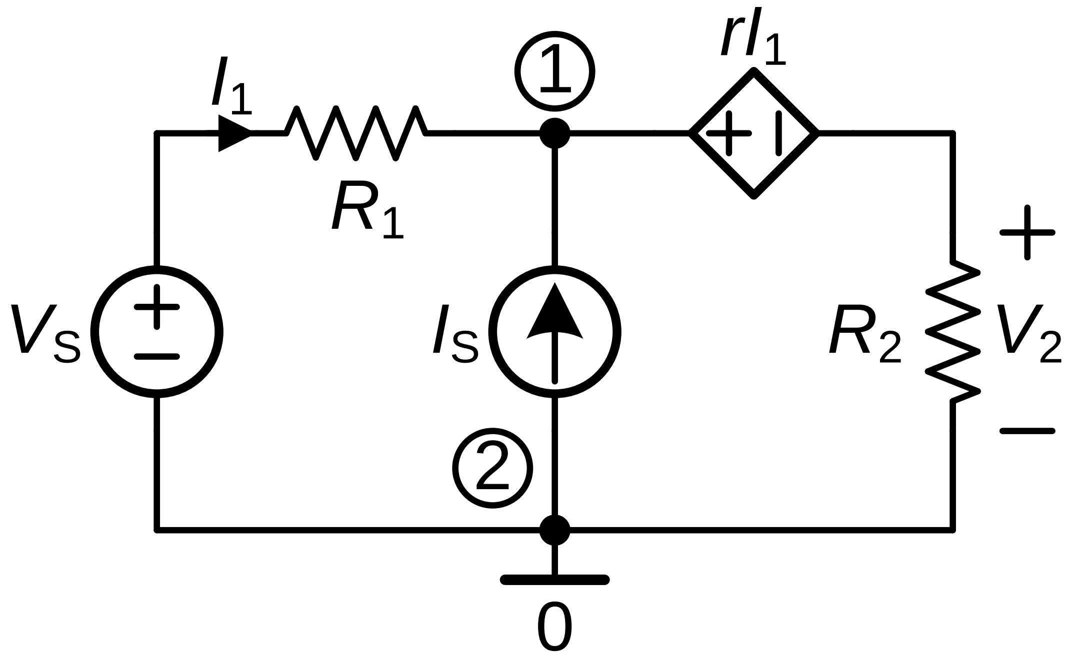
$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)V_{n1}=\frac{V_S}{R_1}+I_S+\frac{rI_1}{R_2}$$

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)V_{n1}=\frac{V_S}{R_1}+I_S-\frac{r(V_{n1}-V_S)}{R_1R_2}$$

$$V_{n1}=\frac{R_2+r}{R_1+R_2+r}V_S+\frac{R_1+R_2}{R_1+R_2+r}I_S$$

$$V_2=V_{n1}-rI_1=V_{n1}+r\frac{(V_{n1}-V_S)}{R_1}$$

$$V_2=\frac{R_2}{R_1+R_2+r}V_S+\frac{(R_1+r)R_2}{R_1+R_2+r}I_S$$



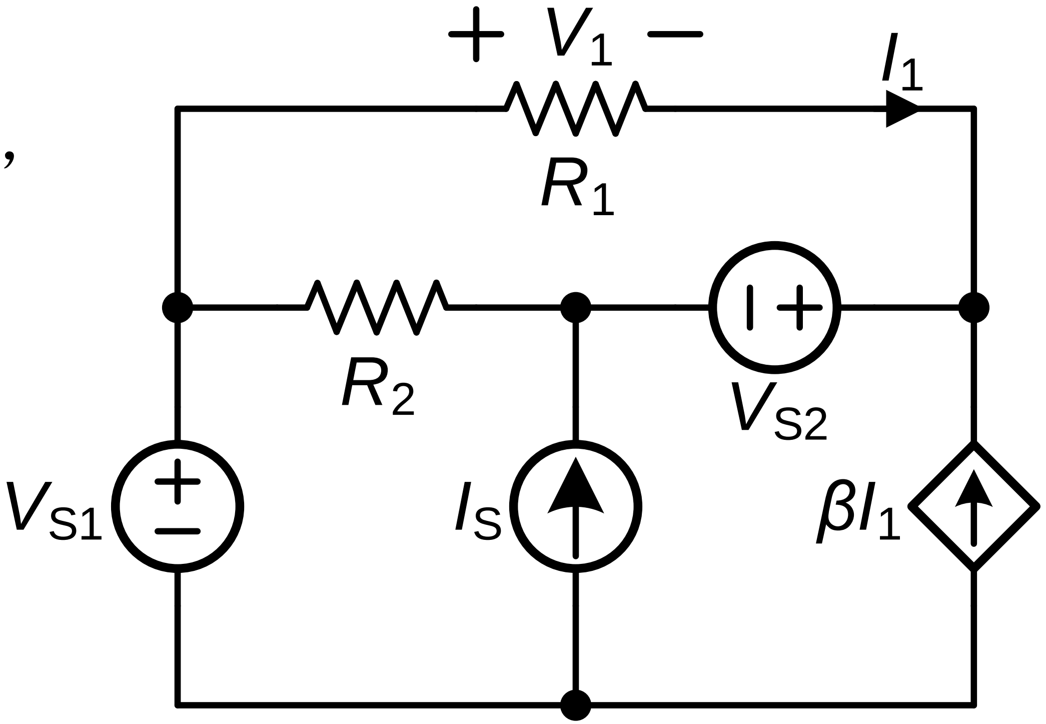
例题4

如图所示，已知$R_1 = R_2 = 1\ \Omega$，$\beta = 2$，$V_{S2} = 3$ V时，$V_1 = 2$ V。求$V_{S2} = 4$ V时的电压V_1。

$V_1 = V'_1 + V''_1$

$V'_1 = 2$ V，是$V_{S2} = 3$ V时，其它独立电源正常作用，电阻R_1的电压值。

V''_1是$V_{S2} = 1$ V，其它独立电源置零，电阻R_1的电压值。



$$(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})V_{n1}=\frac{V''_{S2}}{R_2}+\beta I''_1=\frac{V''_{S2}}{R_2}-\beta\frac{V_{n1}}{R_1}$$

$$V_{n1}=\frac{R_1}{R_1+(1+\beta)R_2}V''_{S2}$$

$V''_1 = -V_{n1} = -1/4$ V，$V_1 = 2$ V $- 1/4$ V $= 1.75$ V

齐性定理

齐性定理：在只有一个独立电源作用的线性电路中，若将该电源变为原来的K倍，则对应的响应也变为原来响应的K倍。

例题5

如图所示，已知$R_1 = R_2 = R_4 = R_6 = 2\ \Omega$，$R_3 = R_5 = 4\ \Omega$。如果$I_1 = 1$ A，求电压V_S；如果$V_S = 1$ V，求各支路电流。

$$I_2 = I_1 = 1\text{ A}$$

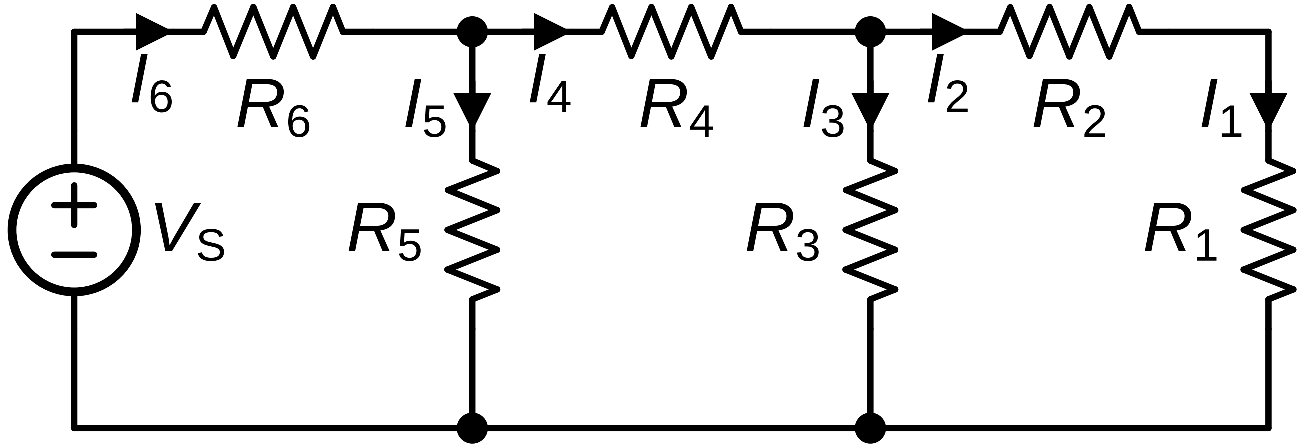
$$I_3 = \frac{R_2 I_2 + R_1 I_1}{R_3} = 1\text{ A}$$

$$I_4 = I_3 + I_2 = 2\text{ A}$$

$$I_5 = \frac{R_4 I_4 + R_3 I_3}{R_5} = 2\text{ A}$$

$$I_6 = I_5 + I_4 = 4\text{ A}$$

$$V_S = R_6 I_6 + R_5 I_5 = 16\text{ V}$$



$$I_3^{'} = I_2^{'} = I_1^{'} = 1\text{ A} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{16}\text{ A},\ I_5^{'} = I_4^{'} = 2\text{ A} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{8}\text{ A},\ I_6^{'} = 4\text{ A} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}\text{ A}$$

齐性定理和叠加定理的数学表达式

在线性电路中，任一响应都是该电路中独立电源的线性组合。

$$Y = K_1X_1 + K_2X_2 + K_3X_3 + \ldots + K_mX_m = \sum_{j=1}^{m} K_jX_j$$

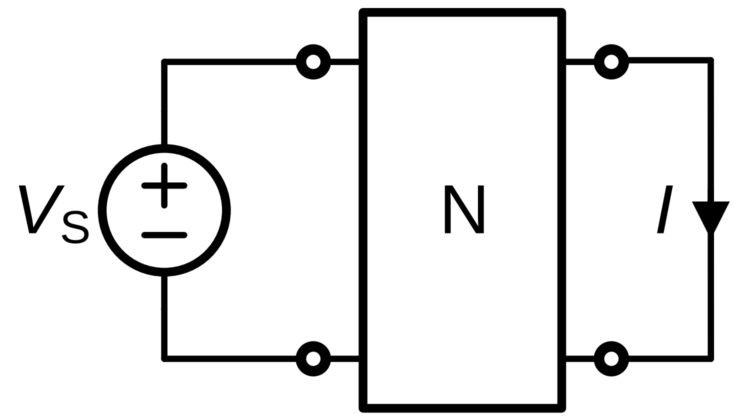
其中Y表示任一响应，X_j表示第j个独立源，K_j为常系数，取决于电路结构和电阻以及受控电源的参数。

例题6

如图所示，N为线性含独立源电阻网络，已知当$V_S = 3$ V时，$I = 2$ A；当$V_S = -2$ V时，$I = -1$ A。若要使$I = 0$ A，V_S应为多少？

$$I = K_1 V_S + \sum_{j=2}^{m} K_j X_j$$

$$\begin{cases} 2 = K_1 \times 3 + \sum_{j=2}^{m} K_j X_j \\ -1 = K_1 \times (-2) + \sum_{j=2}^{m} K_j X_j \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1 = \dfrac{3}{5} \\ \sum_{j=2}^{m} K_j X_j = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$



$$I = \frac{3}{5} V_S + \frac{1}{5},\quad 0 = \frac{3}{5} V_S + \frac{1}{5},\quad V_S = -\frac{1}{3}$$

等效电源定理

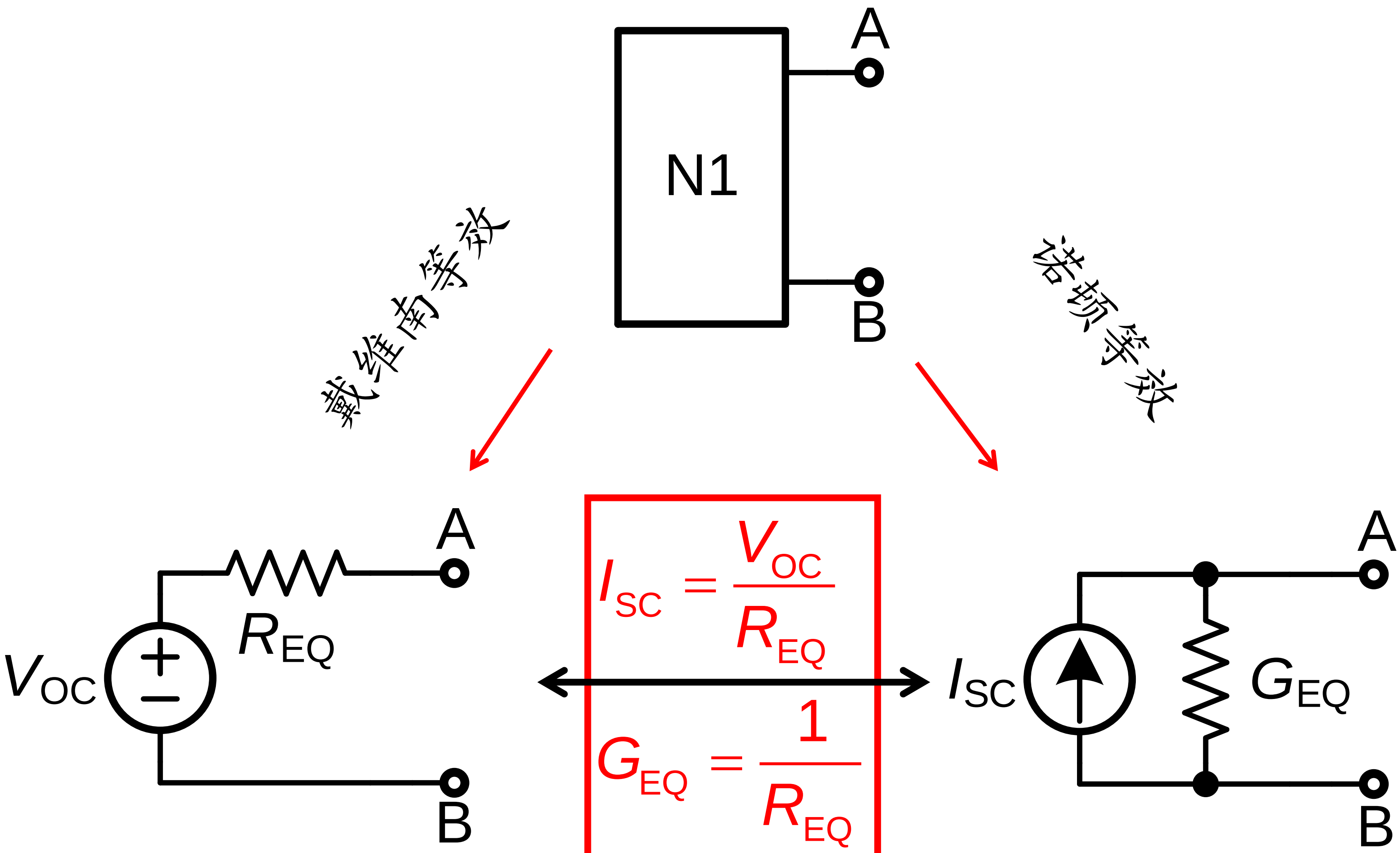
- 戴维南定理

含独立电源、线性电阻和受控源的一端口网络的对外作用可以用电压源和电阻的串联电路来等效。其中电压源的电压等于一端口网络的开路电压，电阻等于一端口网络内所有独立源置零后的等效电阻。

- 诺顿定理

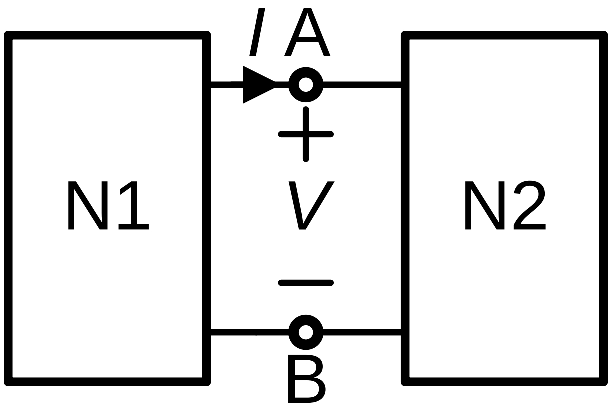
含独立电源、线性电阻和受控源的一端口网络的对外作用可以用电流源和电阻的并联电路来等效。其中电流源的电流等于一端口网络的短路电流，电阻等于一端口网络内所有独立源置零后的等效电阻。

戴维南电路与诺顿电路的关系

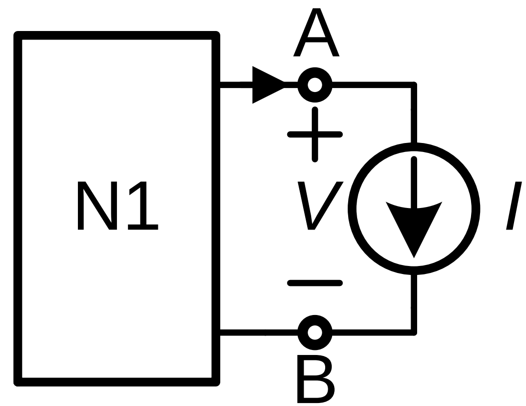


戴维南电路　　诺顿电路

戴维南定理的论证



置换定理



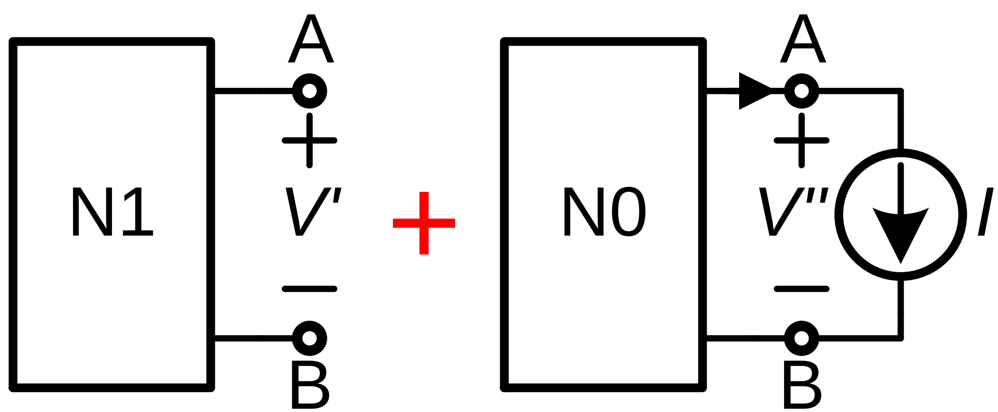
叠加定理

$$V = V' + V'' = \sum_{j=1}^{m} K_j X_j + KI$$

$$= V_{OC} + KI$$

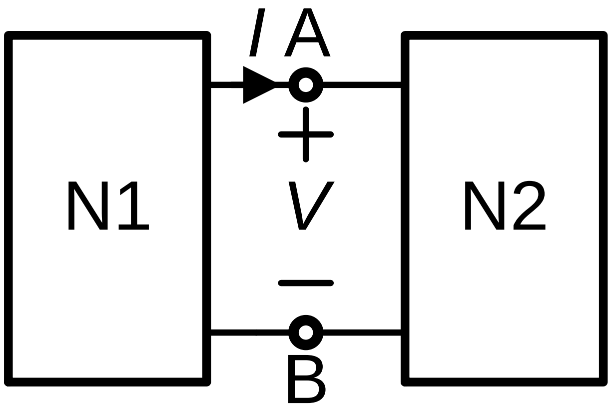
$$R_{EQ} = \frac{V''}{-I} = -K$$

$$V = V_{OC} - R_{EQ} I$$

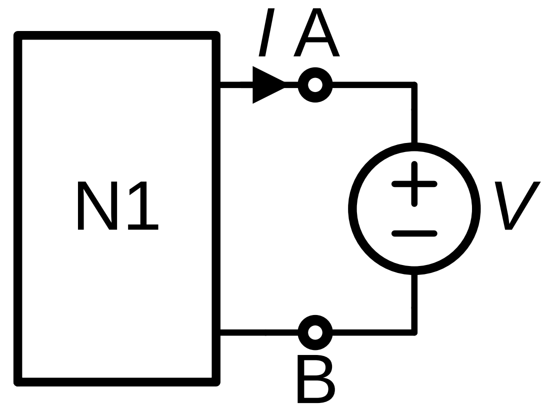


N0为N1独立源置零后网络。

诺顿定理的论证



置换定理 →



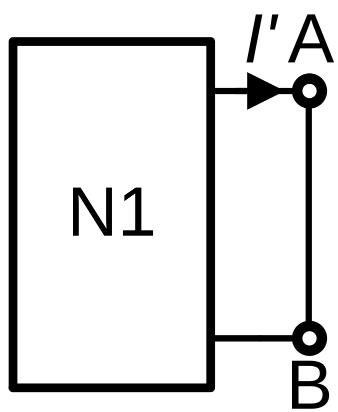
= 叠加定理

$$I = I^{'} + I^{''} = \sum_{j=1}^{m} K_j X_j + KV$$

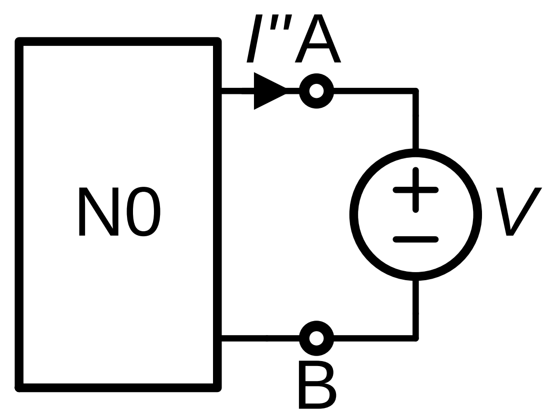
$$= I_{SC} + KV$$

$$G_{EQ} = \frac{-I^{''}}{V} = -K$$

$$I = I_{SC} - G_{EQ} V$$



+



N0为N1独立源置零后网络。

思考

- 任何含源一端口网络都能等效成戴维南电路吗？

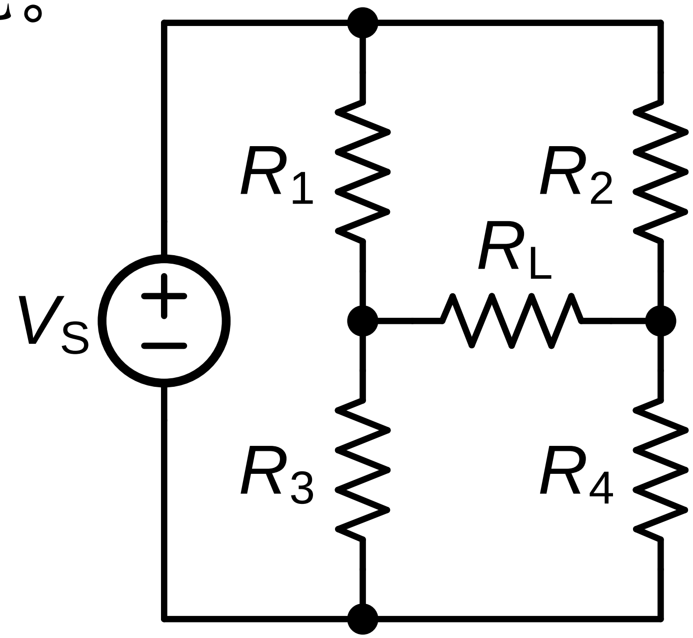
  等效电导G_{EQ} = 0, 只能等效为诺顿电路。

- 任何含源一端口网络都能等效成诺顿电路吗？

  等效电阻R_{EQ} = 0, 只能等效为戴维南电路。

例题7

如图所示电桥电路，已知$R_1 = 4\ \Omega$，$R_2 = 3\ \Omega$，$R_3 = 4\ \Omega$，$R_4 = 6\ \Omega$，$V_S = 6\ \text{V}$。R_L分别为0 Ω，2 Ω和4 Ω时，求电阻R_L的电流和功耗。



1. 计算V_{OC}

$$V_{OC} = 6\ \text{V} \times \frac{4\ \Omega}{4\ \Omega + 4\ \Omega} - 6\ \text{V} \times \frac{6\ \Omega}{3\ \Omega + 6\ \Omega} = -1\ \text{V}$$

2. 计算R_{EQ}

$$R_{EQ} = (4\ \Omega \,||\, 4\ \Omega) + (3\ \Omega \,||\, 6\ \Omega) = 4\ \Omega$$

3. 计算电流和功耗

$$I = \frac{V_{OC}}{R_{EQ} + R_L},\quad P = I^2 R_L$$

－1/4 A，0 W；－1/6 A，1/18 W；－1/8 A，1/16 W；

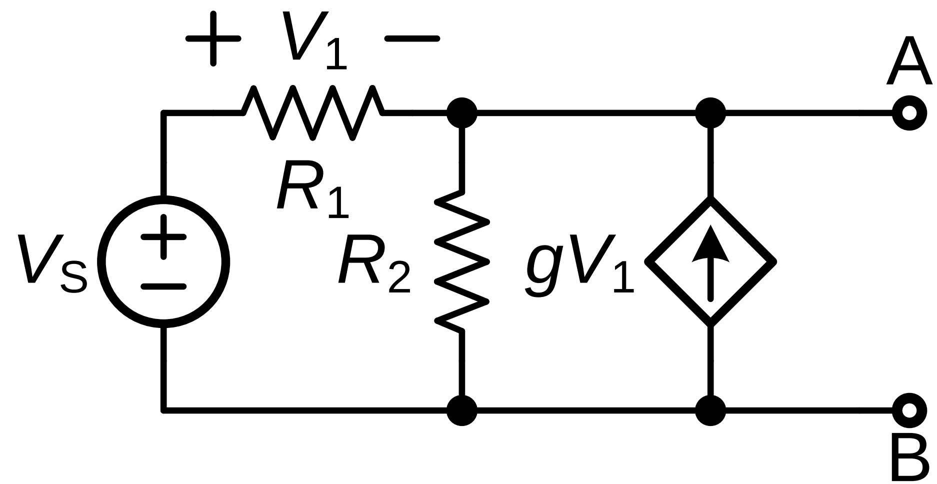
例题8

如图所示，已知R_1 = R_2 = 2 Ω，g = 1/2 S，V_S = 3 V，求戴维南等效电路和诺顿等效电路。

1. 计算V_{OC}

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)V_{OC}=\frac{V_S}{R_1}+g(V_S-V_{OC})$$

$$V_{OC}=2\ \text{V}$$



2. 计算I_{SC}

$$I_{SC}=\frac{V_S}{R_1}+gV_S=3\ \text{A}$$

3. 计算R_{EQ}

$$R_{EQ}=\frac{V_{OC}}{I_{SC}}=\frac{2}{3}\ \Omega$$

例题9

如图所示，已知$R_1 = 2\ \Omega$，$r = 3\ \Omega$。当$R_2 = 10\ \Omega$时，$V_2 = 2\ \text{V}$，求R_2为何值时，$I_2 = 0.5\ \text{A}$?

1. 计算R_{EQ}

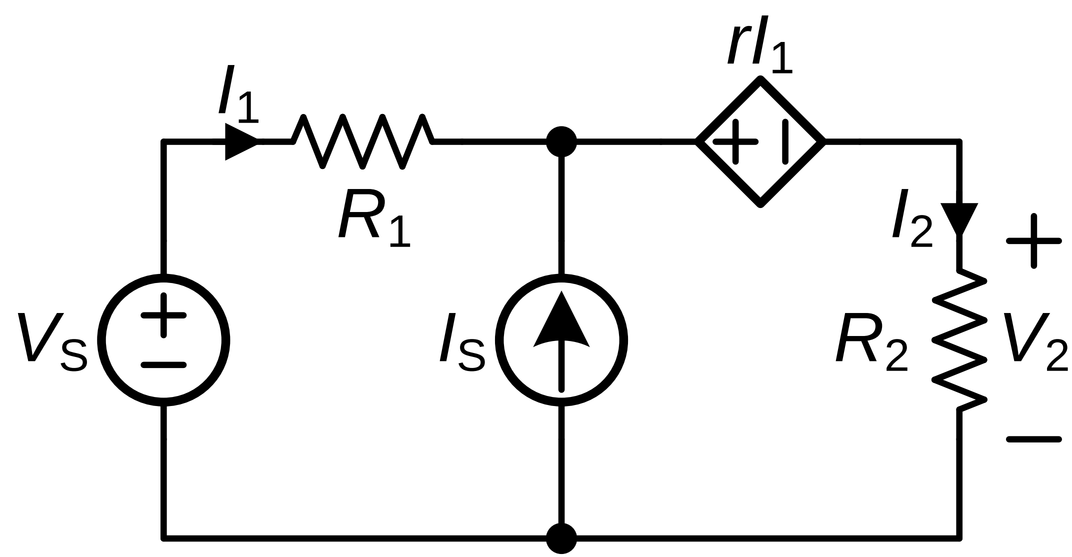
$$R_{EQ} = \frac{V_X}{I_X} = \frac{R_1 I_X + r I_X}{I_X} = R_1 + r = 5\ \Omega$$

2. 戴维南等效，计算V_{OC}

$$V_{OC} = (R_{EQ} + R_2)\frac{V_2}{R_2} = 3\ \text{V}$$

3. 计算电阻R_2

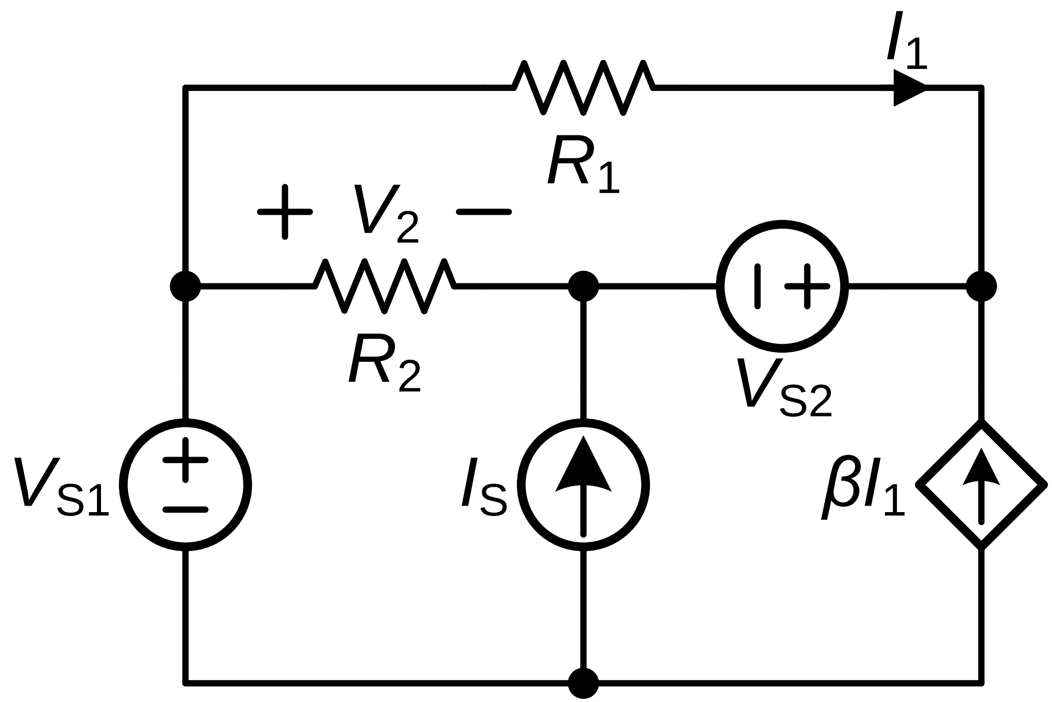
$$R_2 = \frac{V_{OC}}{I_2} - R_{EQ} = 1\ \Omega$$



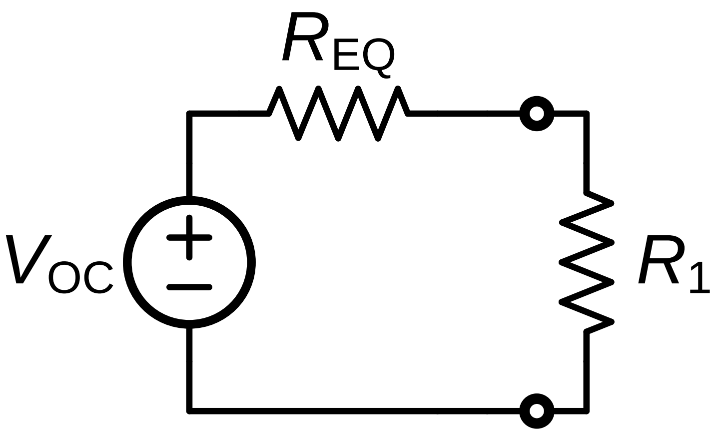
例题10

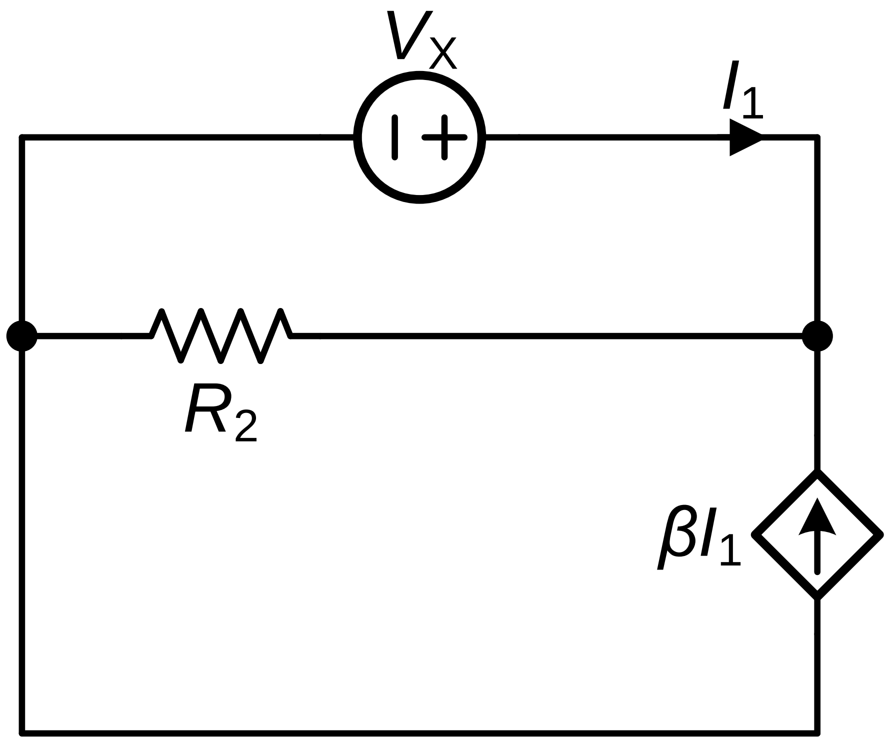
如图所示，已知$R_2 = 1\ \Omega$，$\beta = 2$，当$R_1 = 1\ \Omega$时，$I_1 = 1$ A，$V_2 = -2$ V，当$R_1 = 2\ \Omega$时，求电流I_1和电压V_2的值。

1. 等效电源定理
2. 置换定理
3. 齐性定理
4. 叠加定理



1.等效电源定理





$$R_{EQ} = \frac{V_X}{I_X} = \frac{R_2(I_X + \beta I_X)}{I_X} = R_2(1+\beta) = 3\ \Omega$$

$$V_{OC} = (R_{EQ} + R_1)I_1 = 4\ \text{V}$$

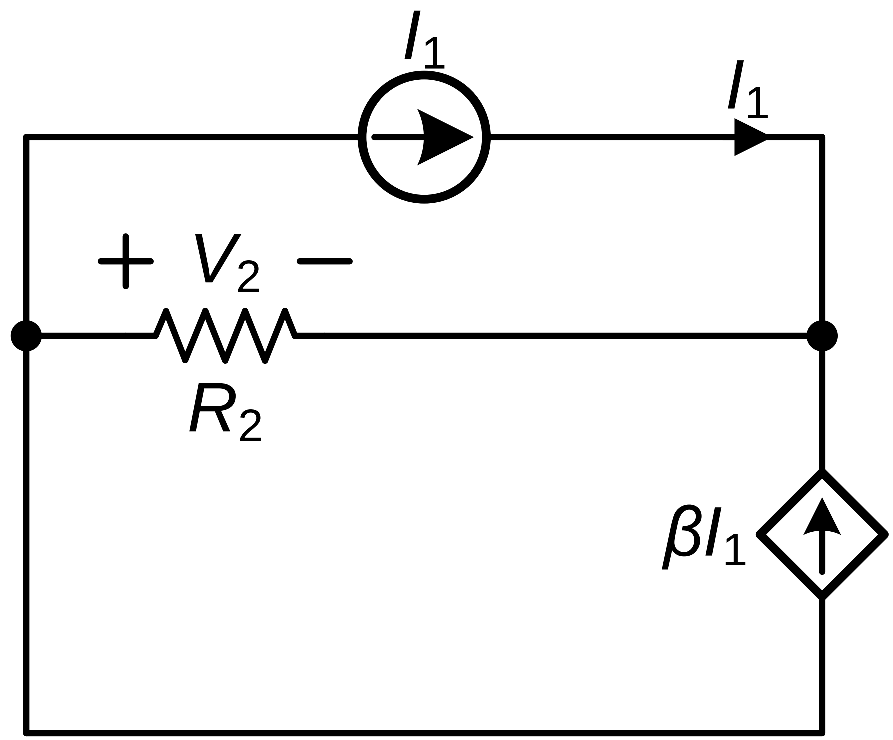
当$R_1 = 2\ \Omega$时，$I_1 = V_{OC}/(R_{EQ}+R_1) = 0.8\ \text{A}$。

2. 置换定理

3. 齐性定理

$$V_2 = -R_2(I_1 + \beta I_1)$$

$$K_1 = \frac{V_2}{I_1} = -R_2(1+\beta) = -3\ \Omega$$



4. 叠加定理

$$V_2 = K_1 I_1 + \sum_{j=2}^{m} K_j X_j$$

$$\sum_{j=2}^{m} K_j X_j = V_2 - K_1 I_1 = (-2) + 3 \times 1 = 1\ \mathrm{V}$$

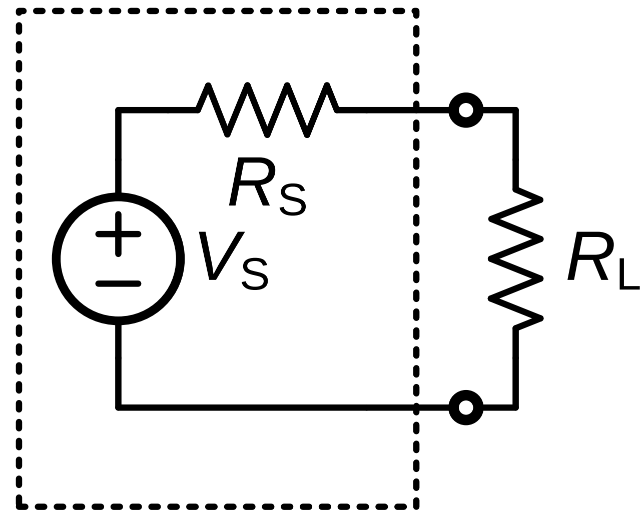
当$R_1 = 2\ \Omega$时， $V_2 = K_1 I_1 + \sum_{j=2}^{m} K_j X_j = -3 \times 0.8 + 1 = -1.4\ \mathrm{V}$

最大功率传输定理

负载R_L上获得的功率，

$$P_L = I_L^2 R_L = \left(\frac{V_S}{R_S + R_L}\right)^2 R_L$$

$$= \frac{V_S^2}{R_S + R_L} \frac{R_L}{R_S + R_L} = P_S \eta$$



其中，P_S为电源发出的功率，η为传输效率。

获得的最大功率的条件和最大功率值，

$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0, \quad R_L = R_S, \quad P_{L,max} = \left(\frac{V_S}{2R_S}\right)^2 R_S = \frac{V_S^2}{4R_S}$$

例题11

如图所示，已知R_1 = 2 Ω，r = 3 Ω，当R_2 = 10 Ω时，V_2 = 2 V。求R_2为何值时，电阻R_2可以获得最大功率?

1. 计算R_{EQ}

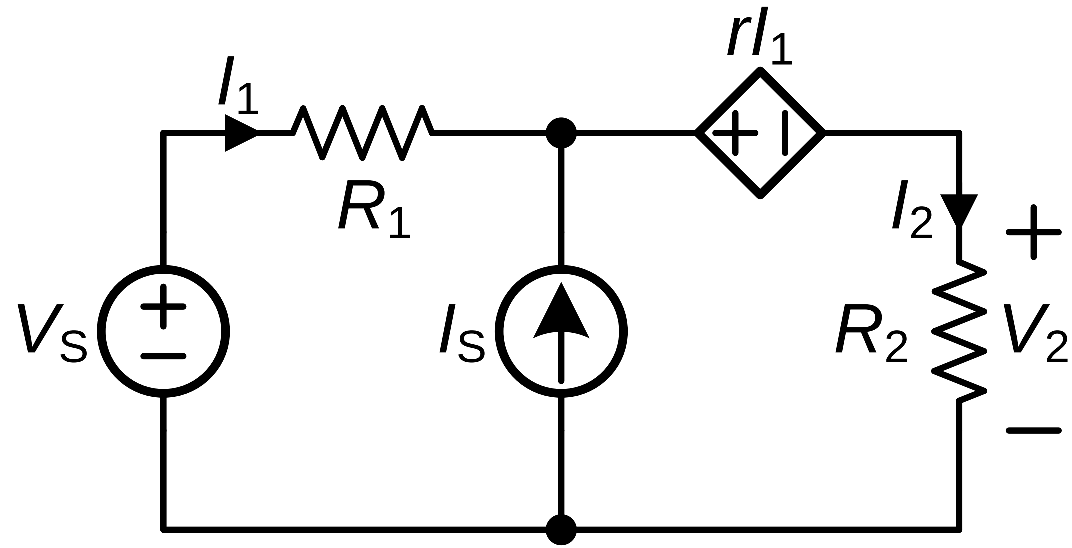
$$R_{EQ}=\frac{V_X}{I_X}=\frac{R_1I_X+rI_X}{I_X}=R_1+r=5\ \Omega$$

2. 戴维南等效，计算V_{OC}

$$V_{OC}=(R_{EQ}+R_2)\frac{V_2}{R_2}=3\ \mathrm{V}$$

3. 计算$P_{L,max}$

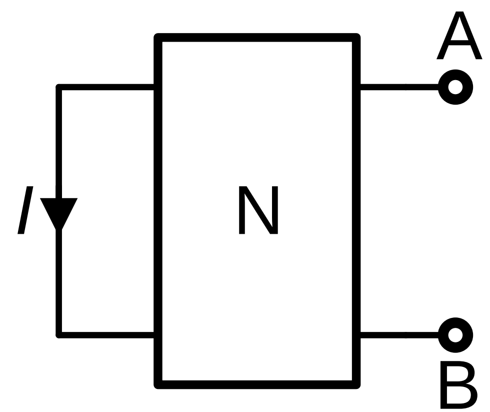
$$R_2=R_{EQ}=5\ \Omega,\quad P_{L,max}=\frac{V_{OC}^2}{4R_{EQ}}=0.45\ \mathrm{W}$$



例题12

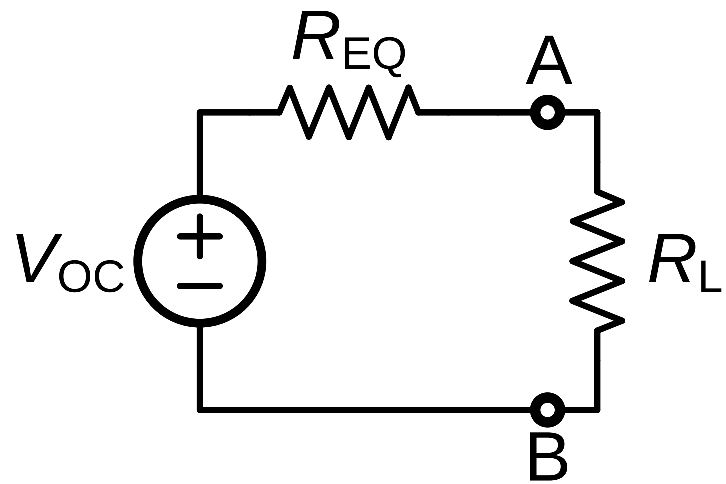
如图所示电路，N为线性含独立源网络，当AB端开路时，I = 1 A；当AB端短路时，I = 3 A；当AB端接2 Ω电阻时，2 Ω电阻刚好获得最大功率，求此时的电流I为多少？

1. 电源等效定理
2. 置换定理
3. 叠加定理



1. 电源等效定理

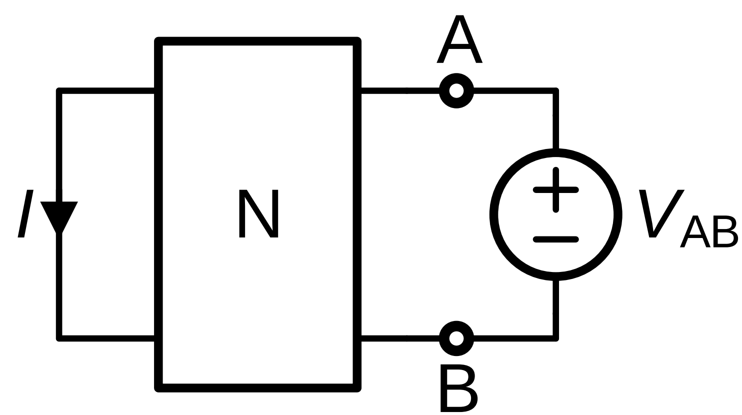
$$\begin{cases} R_L = \infty,\ \ I = 1,\ \ V_{AB} = V_{OC} \\ R_L = 0,\ \ I = 3,\ \ V_{AB} = 0 \\ R_L = 2\ \Omega,\ \ V_{AB} = \dfrac{V_{OC}}{R_{EQ} + R_L} R_L = \dfrac{V_{OC}}{2} \end{cases}$$



2. 置换定理

3. 叠加定理

$$I = K_1 V_{AB} + \sum_{j=2}^{m} K_j X_j$$



$$\begin{cases} 1\text{ A} = K_1 \times V_{OC} + \sum_{j=2}^{m} K_j X_j \\ 3\text{ A} = K_1 \times 0 + \sum_{j=2}^{m} K_j X_j \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1 = -\dfrac{2}{V_{OC}} \\ \sum_{j=2}^{m} K_j X_j = 3\text{ A} \end{cases}$$

$$I = -\frac{2}{V_{OC}} \times \frac{V_{OC}}{2} + 3 = 2\text{ A}$$

特勒根定理

假设两个电路N和$\tilde{N}$，均具有n个节点和b条支路，而且节点和支路的连接关系相同。这样的N和$\tilde{N}$称作结构相同的电路。

对应的节点和支路编号相同，对应支路的电压和电流参考方向相同，电路N中的各支路电压V_k与电路$\tilde{N}$中的对应支路电流$\tilde{I}_k$的乘积之和等于零。

$$\sum_{k=1}^{b} V_k \tilde{I}_k = 0 \quad \text{or} \quad \sum_{k=1}^{b} \tilde{V}_k I_k = 0$$

论证

$$\sum_{k=1}^{b} V_k I_k = \sum_{k=1}^{b} (V_A - V_B) I_{AB}$$

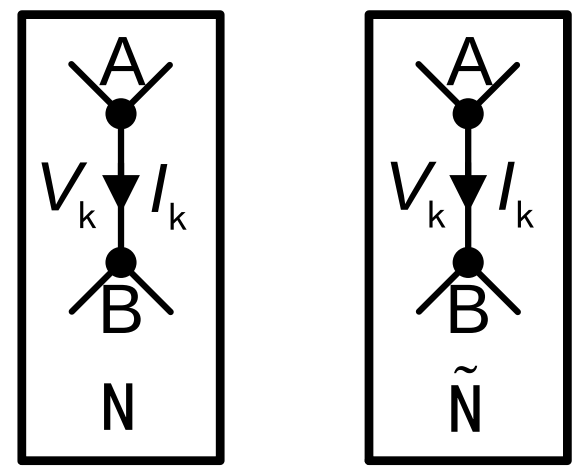
$$= \sum_{k=1}^{b} (V_A I_{AB} + V_B I_{BA})$$

$$= \sum_{k=1}^{b} V_A I_{AB} + \sum_{k=1}^{b} V_B I_{BA}$$

$$= V_A \sum I_{AB} + V_B \sum I_{BA}$$

$$= V_A \times 0 + V_A \times 0$$

$$= 0$$



功率守恒和似功率守恒

如果电路 $\tilde{N}$ 就是电路N，电压和电流为关联参考方向，那么

$$\sum_{k=1}^{b} V_k I_k = 0 \qquad \sum_{k=1}^{b} P_k = 0$$

即，一个电路中各支路吸收功率的代数和等于零。这就是电路的功率守恒定理。

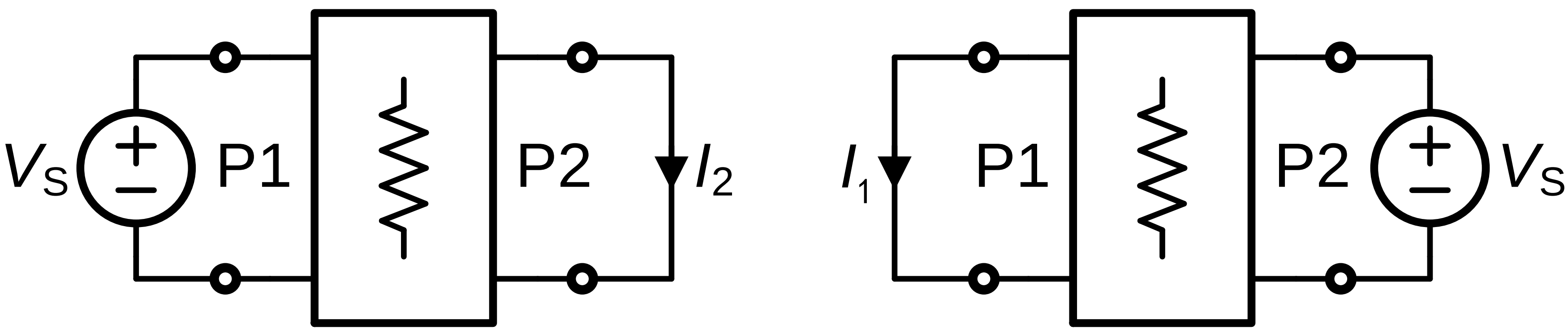
$V_k I_k$ 和 $V_k I_k$ 具有功率的量纲，称为似功率。因此特勒根定理又称为似功率守恒定理。

互易定理

仅含线性电阻和独立电源的电路，其回路方程的系数和节点电压方程得系数都是关于主对角线对称的。具有这种特性的电路属于互易性电路。互易性电路满足互易定理。

第一种形式

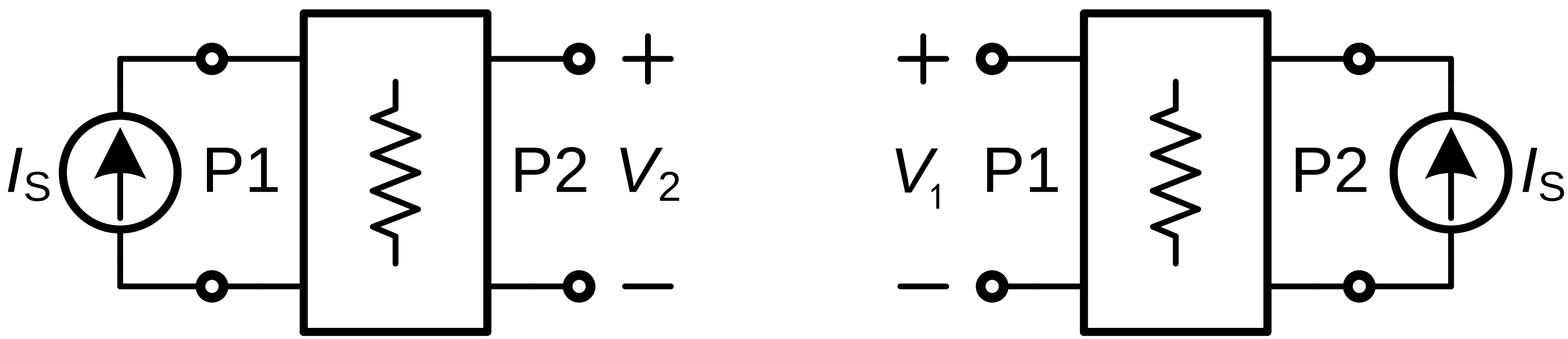
对于仅含线性电阻的电路，当电压源V_S在端口1作用时，在端口2产生的短路电流I_2等于把电压源V_S换到端口2作用而在端口1所产生的短路电流 I_1。



$$I_2 = I_1$$

第二种形式

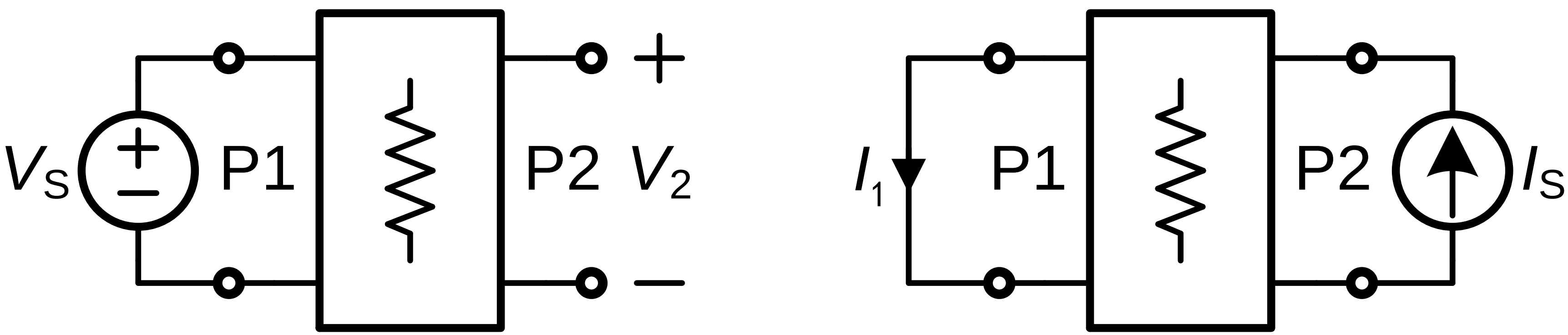
对于仅含线性电阻的电路，当电流源I_S在端口1作用时，在端口2产生的开路电压V_2等于把电流源I_S换到端口2作用而在端口1所产生的开路电压 V_1。



$$V_2 = V_1$$

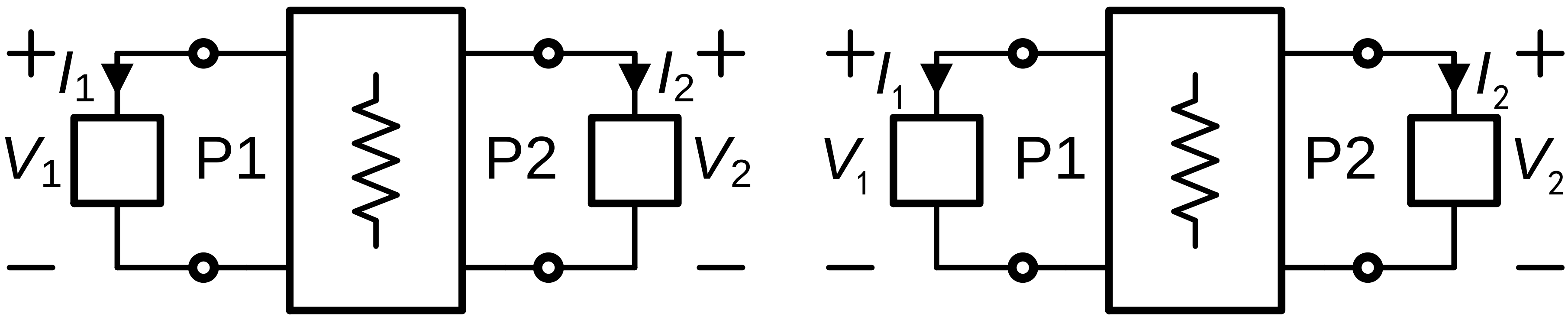
第三种形式

对于仅含线性电阻的电路，当电压源V_S在端口1作用时，在端口2产生的开路电压V_2等于把等数值电流源$I_S(=V_S)$换到端口2作用而在端口1所产生的短路电流 I_1 。



$$\frac{V_2}{I_1} = \frac{V_S}{I_S}$$

论证



由特勒根定理，可得

$$V_1I_1+V_2I_2+\sum_{k=3}^{b}V_kI_k=0 \quad V_1I_1+V_2I_2+\sum_{k=3}^{b}V_kI_k=0$$

$$V_1I_1+V_2I_2+\sum_{k=3}^{b}R_kI_kI_k=0 \quad V_1I_1+V_2I_2+\sum_{k=3}^{b}R_kI_kI_k=0$$

$$V_1I_1+V_2I_2=V_1I_1+V_2I_2$$

$$V_1 \hat{I}_1 + V_2 \hat{I}_2 = \hat{V}_1 I_1 + \hat{V}_2 I_2$$

第一种形式： $V_1 = V_S$， $V_2 = V_0$， $\hat{V}_1 = 0$， $\hat{V}_2 = V_S$

$$\hat{I}_2 = I_1$$

第二种形式： $I_1 = -I_S$， $I_2 = 0$， $\hat{I}_1 = 0$， $\hat{I}_2 = -I_S$

$$\hat{V}_2 = V_1$$

第三种形式： $V_1 = V_S$， $I_2 = 0$， $\hat{V}_1 = 0$， $\hat{I}_2 = -I_S$

$$\frac{V_2}{I_1} = \frac{V_S}{I_S}$$

对偶原理

电路在结构、连接方式、定律、元件、参数、名称、变量及其关系等方面都存在着对偶性。这些互相对偶的“内容”称为对偶因素。

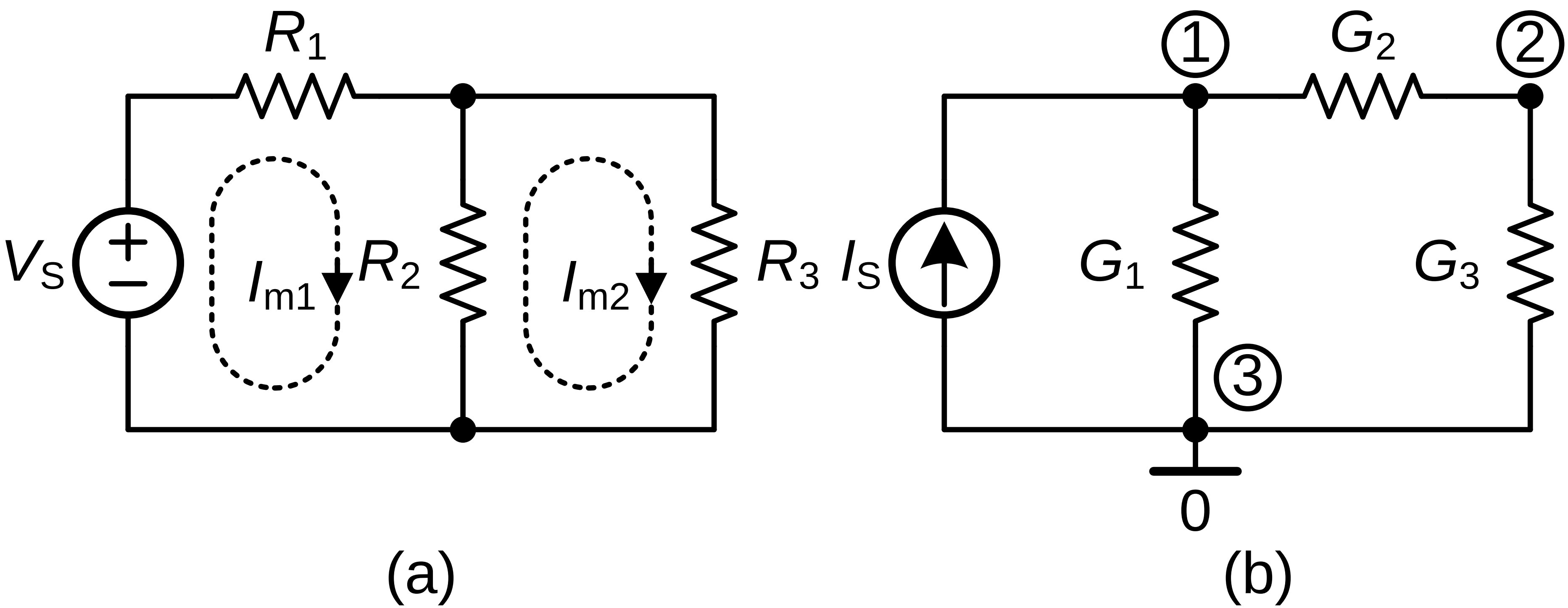
如果电路中某一定理(或者方程、关系式等)的表述是成立的，则将其中的概念(变量、参数、元件和结构等)用其对偶因素替换所得的对偶表述也一定成立。这就是对偶原理。

对偶因素列表

对偶因素		对偶因素	
电压	电流	串联	并联
电荷	磁链	星形联结	三角形联结
电阻	电导	开路	短路
电容	电感	基尔霍夫电压定律	基尔霍夫电流定律
电压源	电流源	戴维南定理	诺顿定理
电压控制电流源	电流控制电压源	回路电流方程	节点电压方程
电压控制电压源	电流控制电流源	支路电流方程	支路电压方程
节点	网孔	互易定理表述一	互易定理表述二
自阻	自导	极点	零点
互阻	互导	时间	频率

例题13

如图所示电路，列写图(a)的回路电流方程和图(b)的节点电压方程，简述这两电路的对偶因素。



回路电流方程

$$\begin{cases}(R_1+R_2)I_{m1}-R_2I_{m2}=V_S \\ -R_2I_{m1}+(R_2+R_3)I_{m2}=0\end{cases}$$

节点电压方程

$$\begin{cases}(G_1+G_2)V_{n1}-G_2V_{n2}=I_S \\ -G_2V_{n1}+(G_2+G_3)V_{n2}=0\end{cases}$$

对偶因素：

电阻与电导，自阻与自导，互阻与互导，回路与节点，回路电流与节点电压，电压源与电流源，