# 电路基础

## (Fundamentals of Electric Circuits, INF0120002.07)

**2019年03月12日**

唐长文 教授

***zwtang@fudan.edu.cn***

***http://rfic.fudan.edu.cn/Courses.htm***

复旦大学/微电子学院/射频集成电路设计研究小组

**版权©2019，版权保留，侵犯必究**

版权©2019，版权保留，侵犯必究

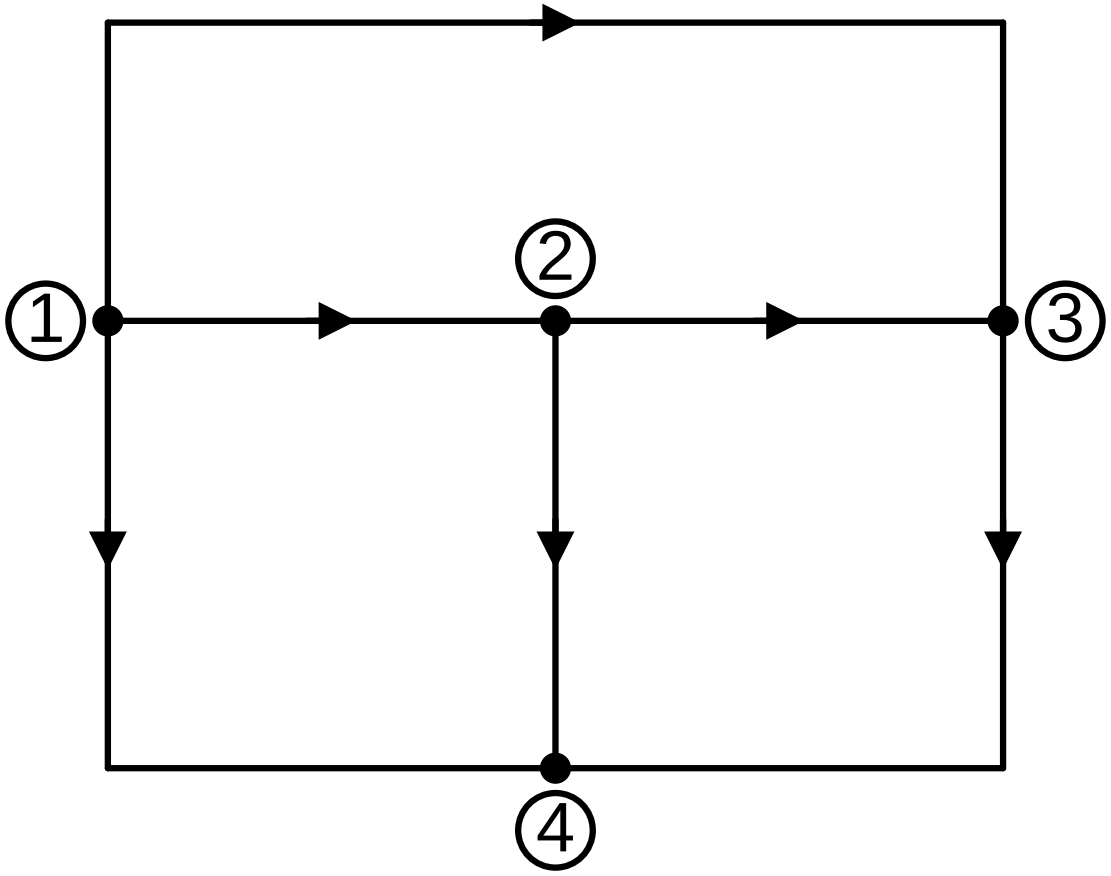
# 第三章 电阻电路的分析

- 电路的图
- 支路电流法和支路电压法
- 回路电流法
- 节点电压法

版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 电路的图

- 电路
  - 节点
  - 支路
- 图和图论
  - 顶点
  - 边
- 无向图和有向图



版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 路径，连通图和回路

- 路径

从一个顶点到另外一个顶点，经过的所有边构成一条路径。

- 连通图

任意两个顶点之间至少有一条路径的图称为连通图。

- 回路

如果一条路径的起点和终点重合，且经过的其他顶点不出现重复，这条闭合路径就是一个回路。

版权©2019，版权保留，侵犯必究

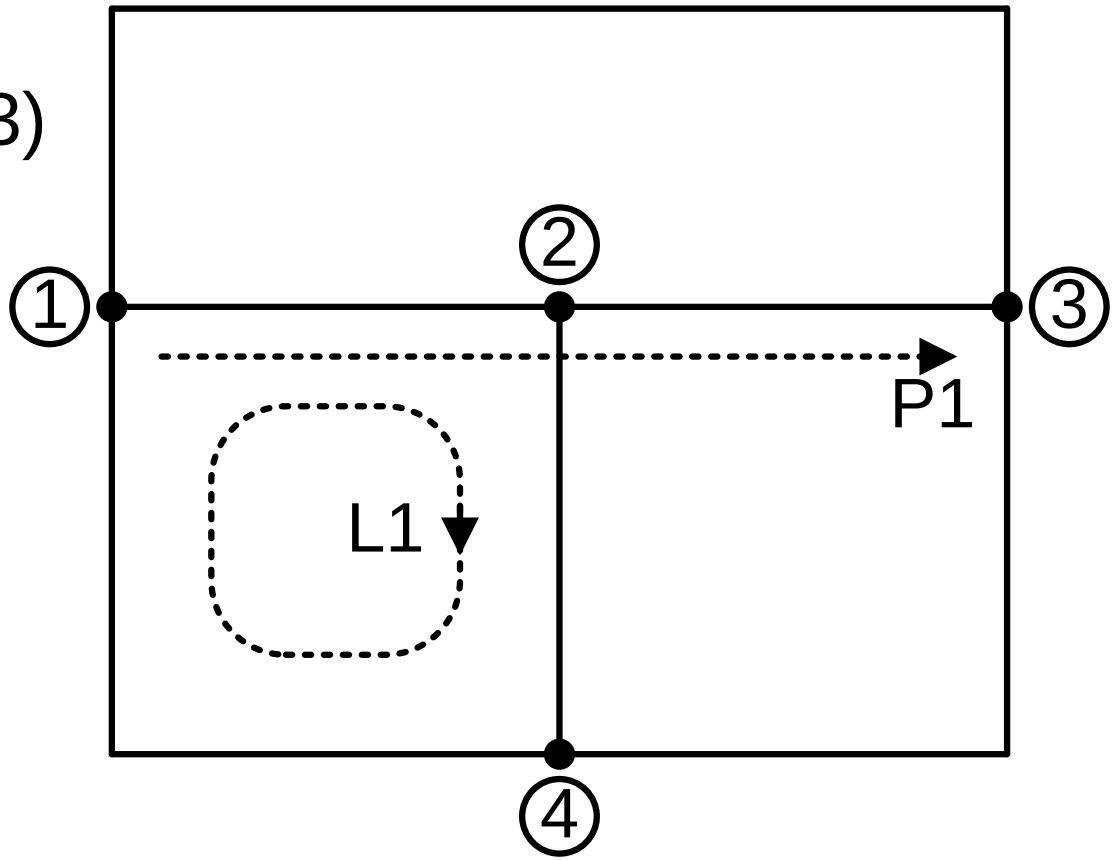
# *n*(= 4)个顶点和*b*(= 6)条边的连通图

- 路径

(1,2,3),(1,3),(1,4,3)

- 回路

(1,2,4),(2,3,4),
(1,3,4),(1,3,2),
(1,2,3,4)
(1,2,4,3)



版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 树，树支和连支

- 树

包含图的全部顶点且不包含任何回路的连通子图。

- 树支

树中包含的边称为该树的树支。

- 连支

图中不包含在树中的边称为树的连支。

$n$个顶点和$b$条边的连通图，其树的树支数为$(n-1)$，连支数为$(b-n+1)$。

版权©2019，版权保留，侵犯必究

# *n*(= 4)个顶点和*b*(= 6)条边的连通图

- 树

(4,2,3),(4,5,3),

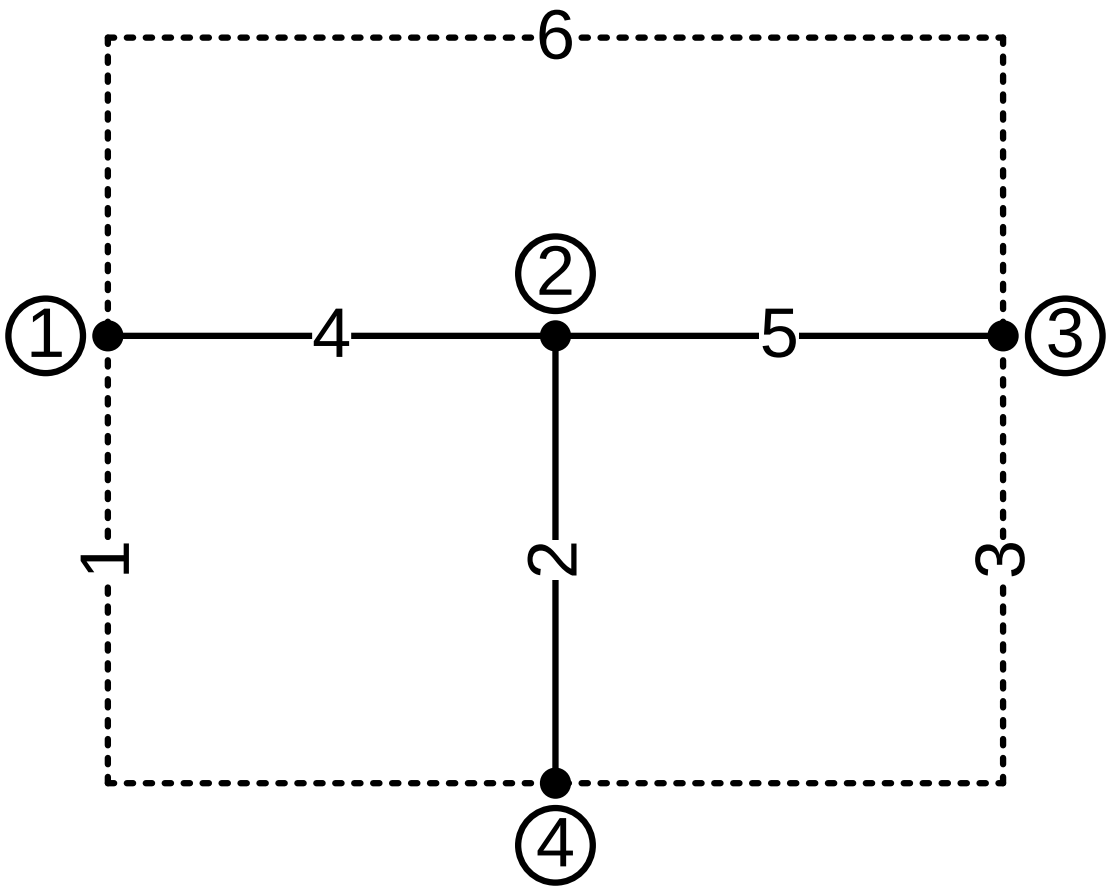
(4,2,5)

- 树支

4,2,5

- 连支

1,3,6



版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 基本回路，网孔和平面图

- 基本回路

只包含一个连支的回路称为基本回路，也称单连支回路。基本回路数等于连支数。

- 平面图

如果一个图画在平面上，各条边除了连接的点外不再交叉，这样的图称为平面图。

- 网孔

平面图的单孔回路。内部不存在任何边的网孔称为内网孔。外部不存在任何边的网孔称为外网孔。

版权©2019，版权保留，侵犯必究

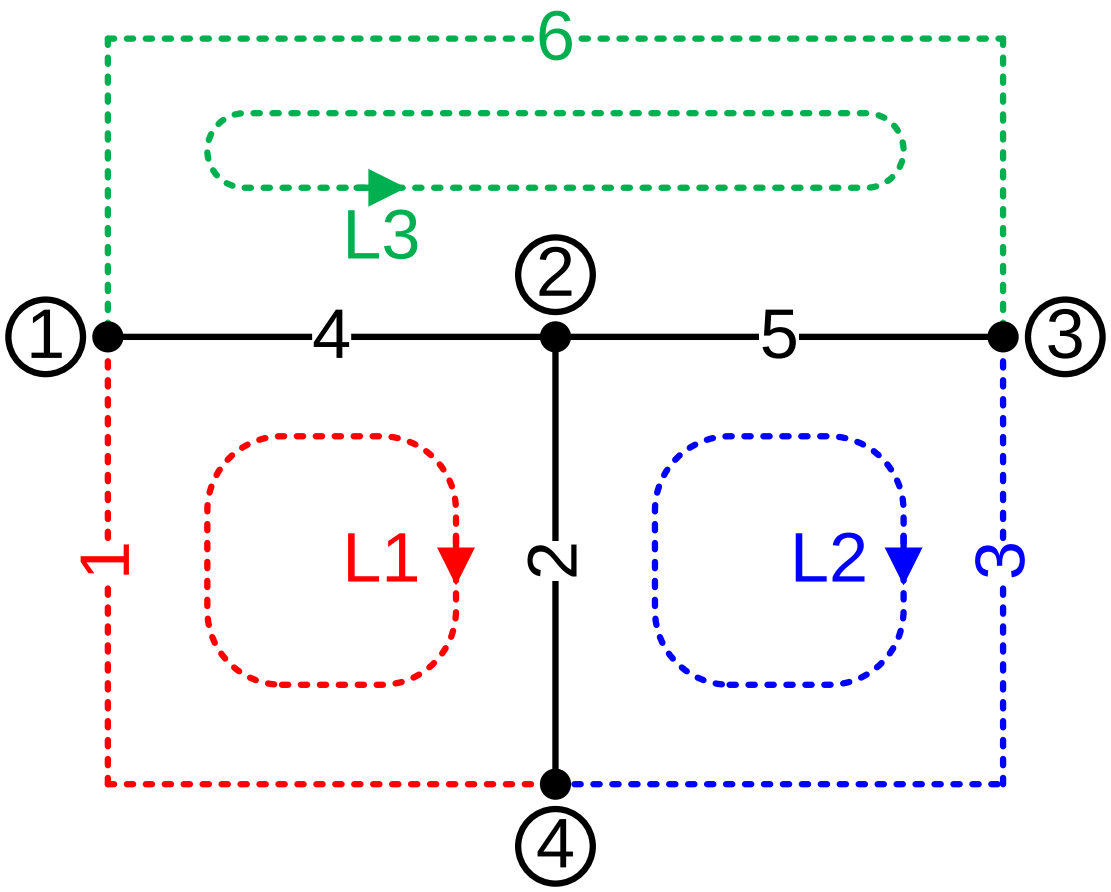
# *n*(= 4)个顶点和*b*(= 6)条边的连通图

- 基本回路

(1,4,2),(2,5,3),
(4,5,6)

- 网孔

(1,4,2),(2,5,3),
(4,5,6)



版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 电流和电压独立方程

对于具有$n$个节点和$b$条支路的电路，基本回路数等于连支数$(b-n+1)$。

在任意$(n-1)$个节点上可以得到$(n-1)$个独立的KCL方程。

在任意$(b-n+1)$个基本回路上可以得到$(b-n+1)$个独立的KVL方程。

总共$b$个独立的KCL和KVL方程。

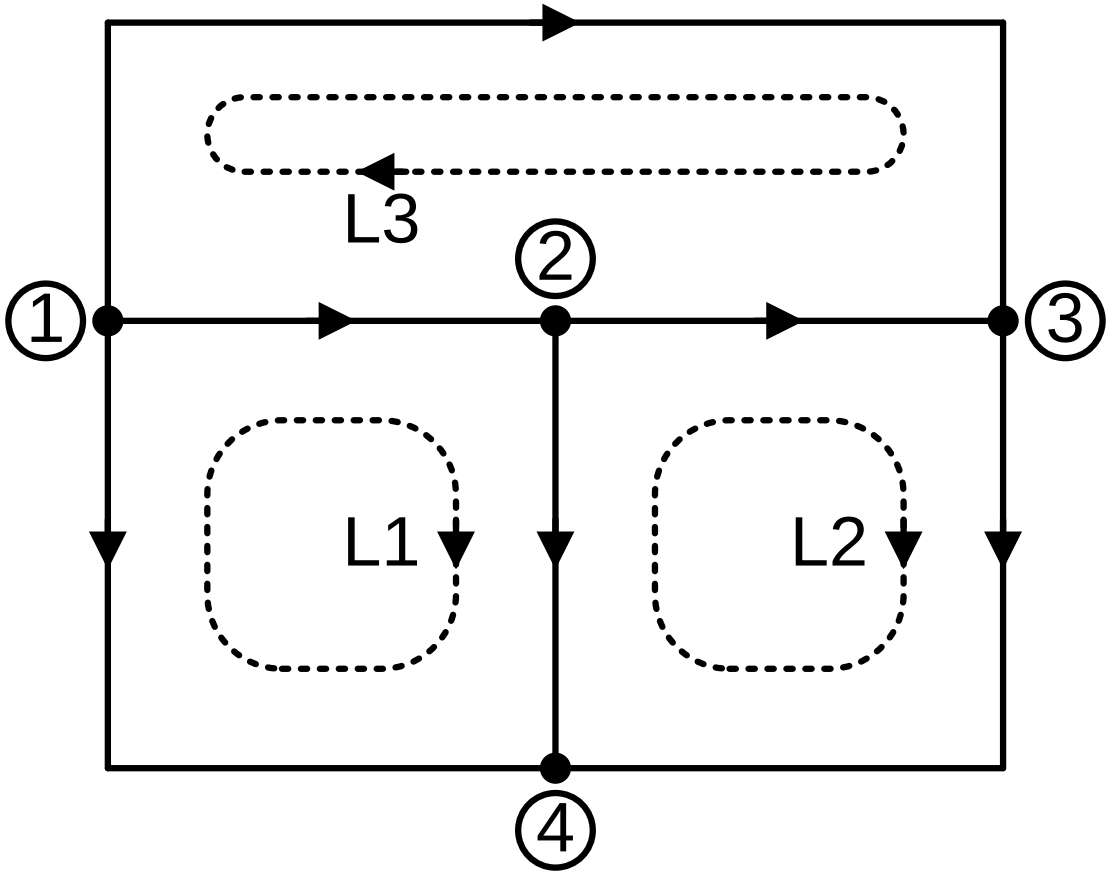
根据每条支路元件的VCR方程又可以列出$b$个方程。因此，可由$2b$个方程解出$b$个支路电压和$b$个支路电流。

版权©2019，版权保留，侵犯必究

# $n(=4)$个节点和$b(=6)$条支路的电路

- KCL方程

$$\begin{cases} I_{12}+I_{13}+I_{14}=0 \\ -I_{12}+I_{23}+I_{24}=0 \\ -I_{13}-I_{23}+I_{34}=0 \end{cases}$$




- KVL方程

$$\begin{cases} V_{12}+V_{24}-V_{14}=0 \\ V_{23}+V_{34}-V_{24}=0 \\ V_{13}-V_{23}-V_{12}=0 \end{cases}$$

- VCR方程

$$V_{jk}=R_{jk}I_{jk} \quad \text{or} \quad V_{jk}=V_S,\alpha V_{lm},rI_{lm} \quad \text{or} \quad I_{jk}=I_S,gV_{lm},\beta I_{lm}$$

版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 支路电流法和支路电压法

$(n-1)$个独立的KCL方程和$(b-n+1)$个独立的KVL方程，$b$个支路元件的VCR方程。

- 支路电流法

将支路电压以支路电流表示，然后代入KVL方程，这种方法称为支路电流法。

- 支路电压法

将支路电流以支路电压表示，然后代入KCL方程，这种方法称为支路电压法。

版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 例题1

列出如图所示电路的支路电流方程和支路电压方程。

- KCL方程

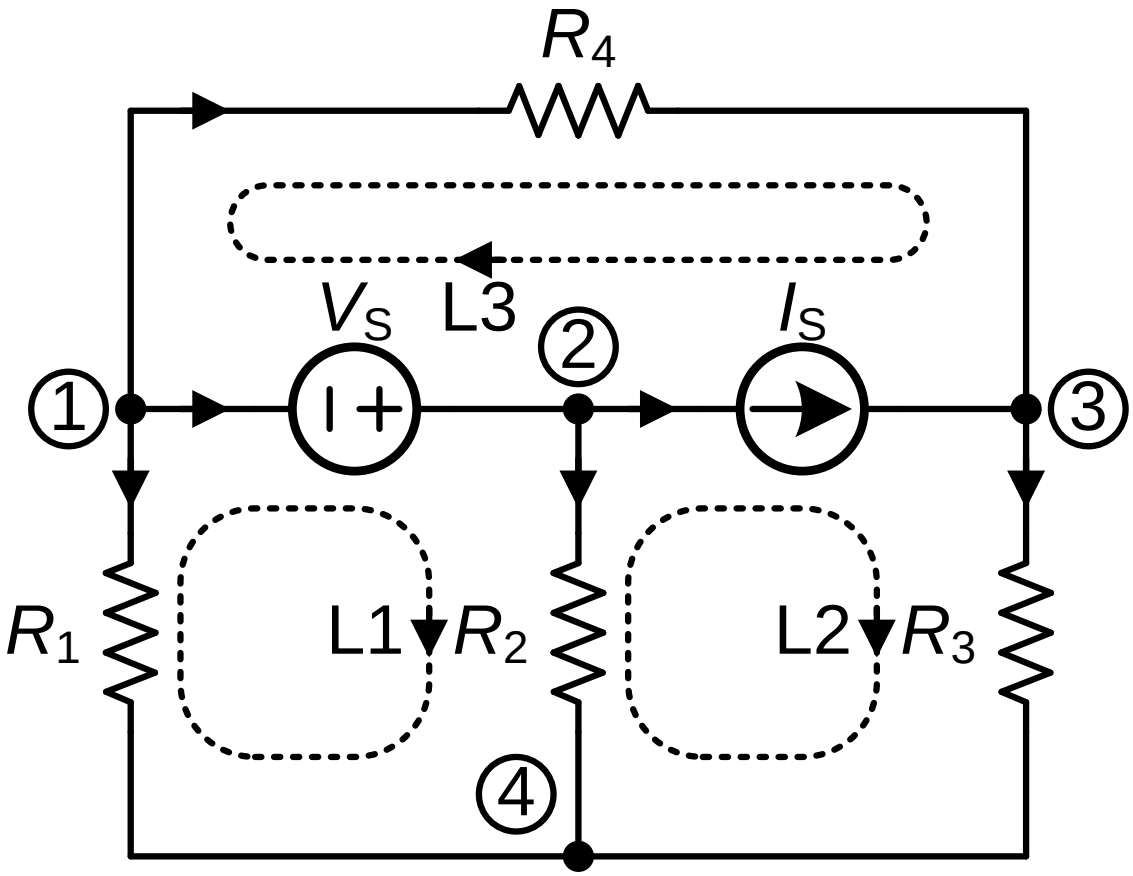
$$\begin{cases} I_{12}+I_{13}+I_{14}=0 \\ -I_{12}+I_{23}+I_{24}=0 \\ -I_{13}-I_{23}+I_{34}=0 \end{cases}$$

- KVL方程

$$\begin{cases} V_{12}+V_{24}-V_{14}=0 \\ V_{23}+V_{34}-V_{24}=0 \\ V_{13}-V_{23}-V_{12}=0 \end{cases}$$

- VCR方程

$$V_{14}=R_1 I_{14},\quad V_{24}=R_2 I_{24},$$
$$V_{34}=R_3 I_{34},\quad V_{12}=-V_S,$$
$$I_{23}=I_S,\ V_{13}=R_4 I_{13}$$



版权©2019，版权保留，侵犯必究

## 支路电流法

$$\begin{cases} I_{12}+I_{13}+I_{14}=0 \\ -I_{12}+I_S+I_{24}=0 \\ -I_{13}-I_S+I_{34}=0 \\ -V_S+R_2I_{24}-R_1I_{14}=0 \\ V_{23}+R_3I_{34}-R_2I_{24}=0 \\ R_4I_{13}-V_{23}+V_S=0 \end{cases}$$

电流源所在的支路电流为确定量，其支路电压为待求量。

## 支路电压法

$$\begin{cases} I_{12}+G_4V_{13}+G_1V_{14}=0 \\ -I_{12}+I_S+G_2V_{24}=0 \\ -G_1V_{13}-I_S+G_3V_{34}=0 \\ -V_S+V_{24}-V_{14}=0 \\ V_{23}+V_{34}-V_{24}=0 \\ V_{13}-V_{23}+V_S=0 \end{cases}$$

电压源所在的支路电压为确定量，其支路电流为待求量。

版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 例题2

列出如图所示电路的支路电流方程和支路电压方程。

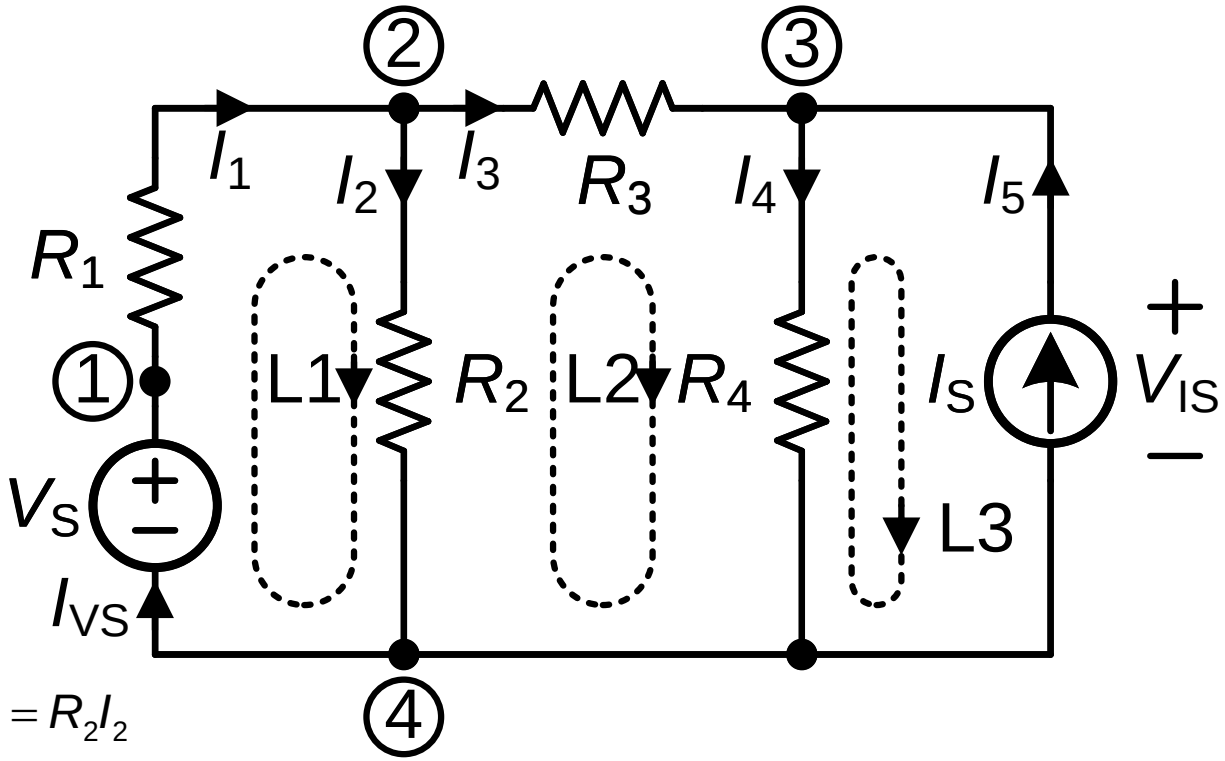
- KCL方程

$$\begin{cases} -I_{VS}+I_1=0 \\ -I_1+I_2+I_3=0 \\ -I_3+I_4-I_5=0 \end{cases}$$

- KVL方程

$$\begin{cases} V_{41}+V_{12}+V_{24}=0 \\ -V_{24}+V_{23}+V_{34}=0 \\ -V_{34}+V_{IS}=0 \end{cases}$$

- VCR方程




$$V_{12}=R_1I_1,\quad V_{23}=R_3I_3,\quad V_{24}=R_2I_2$$
$$V_{34}=R_4I_4,\quad V_{41}=-V_S,\quad I_5=I_S$$

节点1为简单节点，回路L3为简单回路。

版权©2019，版权保留，侵犯必究

## 支路电流方程

$$
\begin{cases}
-I_{VS} + I_1 = 0 \\
-I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\
-I_3 + I_4 - I_S = 0 \\
-V_S + R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0 \\
-R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 = 0 \\
-R_4 I_4 + V_{IS} = 0
\end{cases}
$$

## 支路电压方程

$$
\begin{cases}
-I_{VS} + G_1 V_{12} = 0 \\
-G_1 V_{12} + G_2 V_{24} + G_3 V_{23} = 0 \\
-G_3 V_{23} + G_4 V_{34} - I_S = 0 \\
-V_S + V_{12} + V_{24} = 0 \\
-V_{24} + V_{23} + V_{34} = 0 \\
-V_{34} + V_{IS} = 0
\end{cases}
$$

版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 受控源支路的处理方法

受控源支路的VCR方程由受控源表达式方程替代。

受控电流源所在的支路电流为受控源表达式，其所在支路电压为待求量。

受控电压源所在的支路电压为受源控表达式，其所在支路电流为待求量。

版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 例题3

列出如图所示电路的支路电流方程和支路电压方程。

- KCL方程

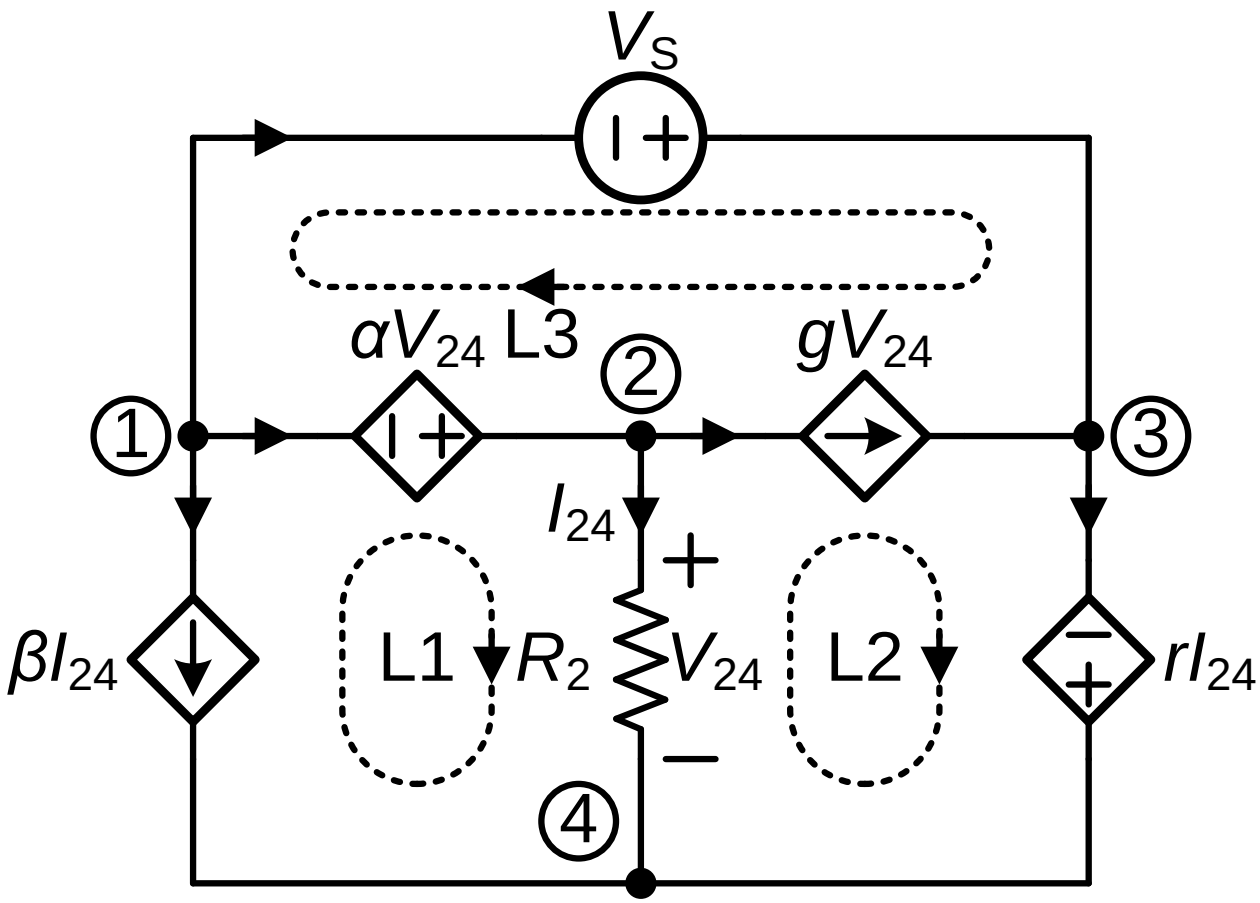
$$\begin{cases} I_{12}+I_{13}+I_{14}=0 \\ -I_{12}+I_{23}+I_{24}=0 \\ -I_{13}-I_{23}+I_{34}=0 \end{cases}$$

- KVL方程

$$\begin{cases} V_{12}+V_{24}-V_{14}=0 \\ V_{23}+V_{34}-V_{24}=0 \\ V_{13}-V_{23}-V_{12}=0 \end{cases}$$

- VCR方程

$$I_{14}=\beta I_{24},\quad V_{24}=R_2 I_{24},$$
$$V_{34}=-rI_{24},\quad V_{12}=-\alpha V_{24},$$
$$I_{23}=gV_{24},\quad V_{13}=-V_S$$



版权©2019，版权保留，侵犯必究

## 支路电流方程

$$\begin{cases} I_{12}+I_{13}+\beta I_{24}=0 \\ -I_{12}+gR_2I_{24}+I_{24}=0 \\ -I_{13}-gR_2I_{24}+I_{34}=0 \\ -\alpha R_2I_{24}+R_2I_{24}-V_{14}=0 \\ V_{23}-rI_{24}-R_2I_{24}=0 \\ -V_S-V_{23}-\alpha R_2I_{24}=0 \end{cases}$$

受控电流源所在的支路电流为受控源表达式，其支路电压为待求量。

## 支路电压方程

$$\begin{cases} I_{12}+I_{13}+\beta G_2V_{24}=0 \\ -I_{12}+gV_{24}+G_2V_{24}=0 \\ -I_{13}-gV_{24}+I_{34}=0 \\ -\alpha V_{24}+V_{24}-V_{14}=0 \\ V_{23}-rG_2V_{24}-V_{24}=0 \\ -V_S-V_{23}-\alpha V_{24}=0 \end{cases}$$

受控电压源所在的支路电压为受控源表达式，其支路电流为待求量。

版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 列出支路电流方程的步骤

1、给定各支路电压和支路电流的参考方向；

2、选取$(n-1)$个独立节点列出KCL方程；

3、选取$(b-n+1)$个独立回路，给定回路的绕行方向，列出KVL方程；

4、将支路元件的VCR方程代入KVL方程，并将受控表达式代入KCL和KVL方程。

版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 列出支路电压方程的步骤

1、给定各支路电压和支路电流的参考方向；

2、选取$(n-1)$个独立节点列出KCL方程；

3、选取$(b-n+1)$个独立回路，给定回路的绕行方向，列出KVL方程；

4、将支路元件的VCR方程代入KCL方程，并将受控表达式代入KCL和KVL方程。

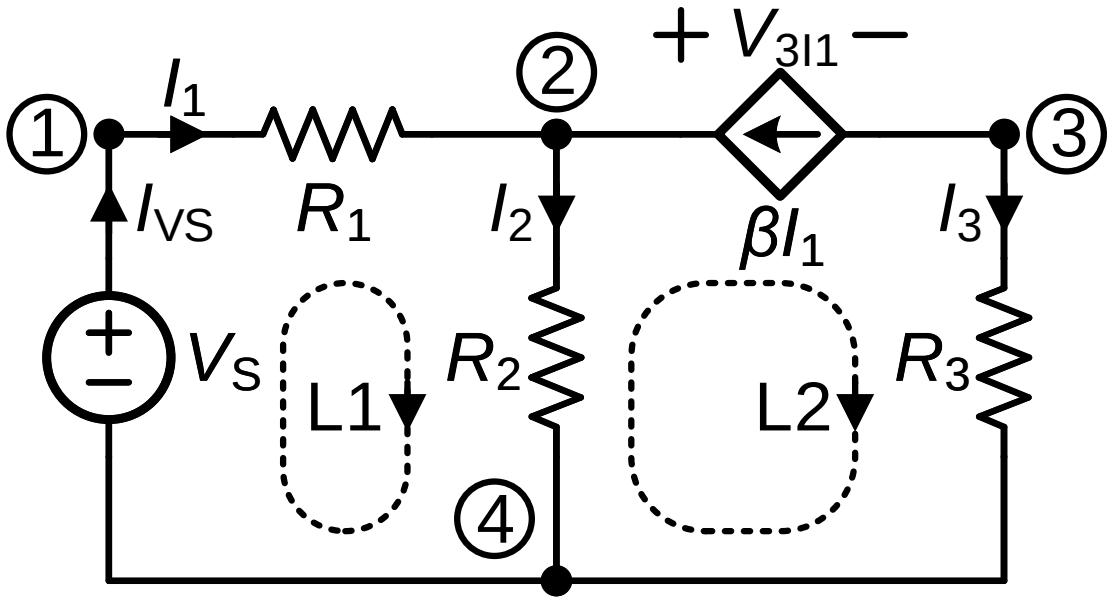
版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 例题4

如图所示，已知$R_1 = 1\ \Omega$，$R_2 = 2\ \Omega$，$R_3 = 4\ \Omega$，$\beta = 3$，$V_S = 9\ \mathrm{V}$，求电流$I_1$。

支路电流方程

$$\begin{cases} -I_{VS} + I_1 = 0 \\ -I_1 + I_2 - \beta I_1 = 0 \\ \beta I_1 + I_3 = 0 \\ -V_S + R_1 I_1 + R_2 I_2 = 0 \\ -R_2 I_2 + V_{3I1} + R_3 I_3 = 0 \end{cases}$$




$I_1 = 1\ \mathrm{A}$, $I_2 = 4\ \mathrm{A}$, $I_3 = -3\ \mathrm{A}$, $I_{VS} = 1\ \mathrm{A}$, $V_{3I1} = 20\ \mathrm{V}$

版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 回路电流法

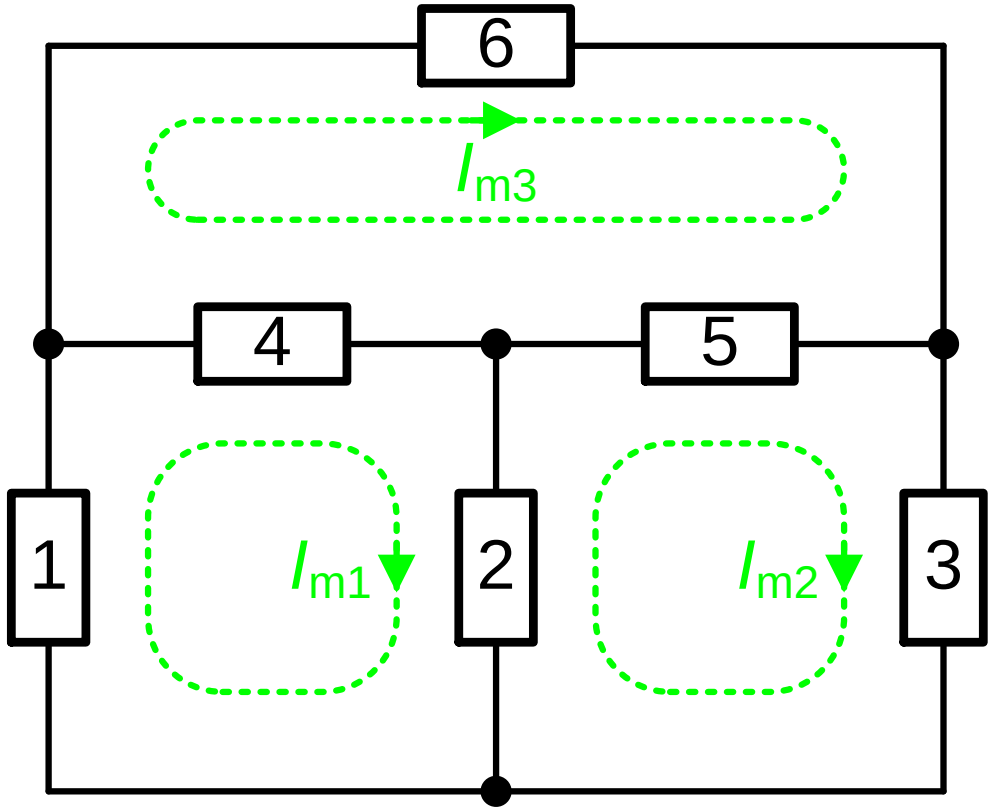
假设在每个独立回路中存在一个闭合流动的电流，这个电流称为回路电流。

回路电流：

$I_{l1}$，$I_{l2}$和$I_{l3}$

网孔电流：

$I_{m1}$，$I_{m2}$和$I_{m3}$



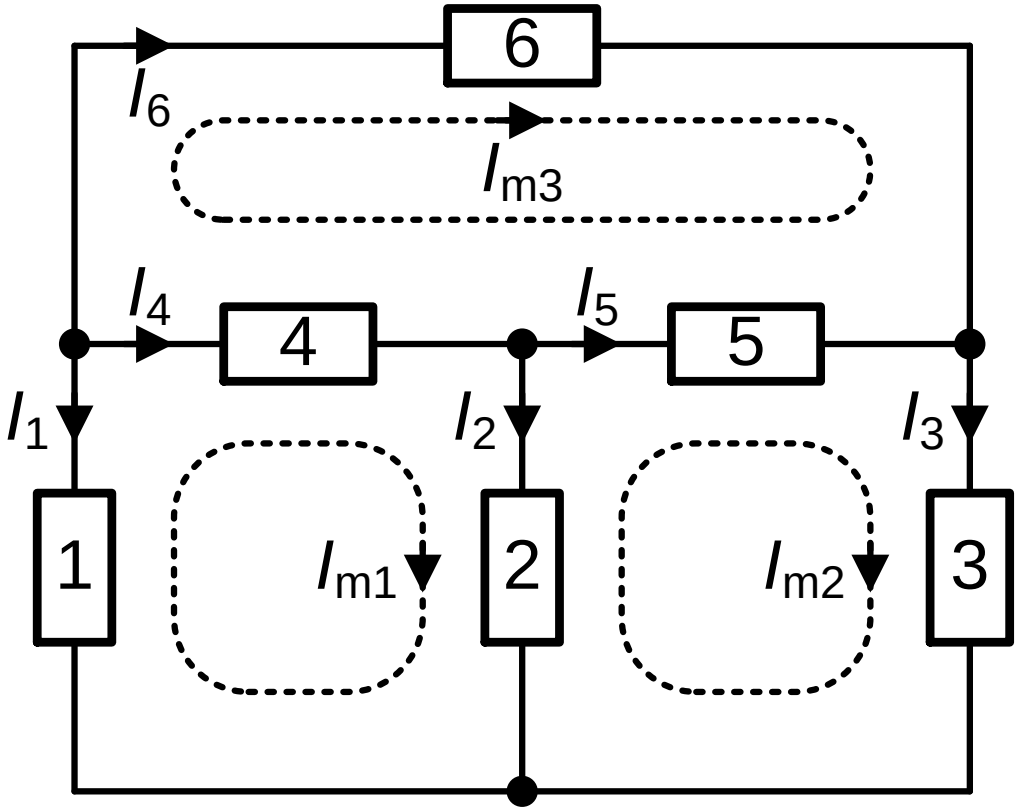
版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 支路电流与回路电流

支路电流可以通过回路电流的代数和表示。若支路电流与回路电流方向相同，回路电流前取正号，否则取负号。

支路电流：

$$I_1 = -I_{m1},\quad I_2 = I_{m1} - I_{m2},$$
$$I_3 = I_{m2},\quad I_4 = I_{m1} - I_{m3},$$
$$I_5 = I_{m2} - I_{m3},\quad I_6 = I_{m3}$$



版权©2019，版权保留，侵犯必究

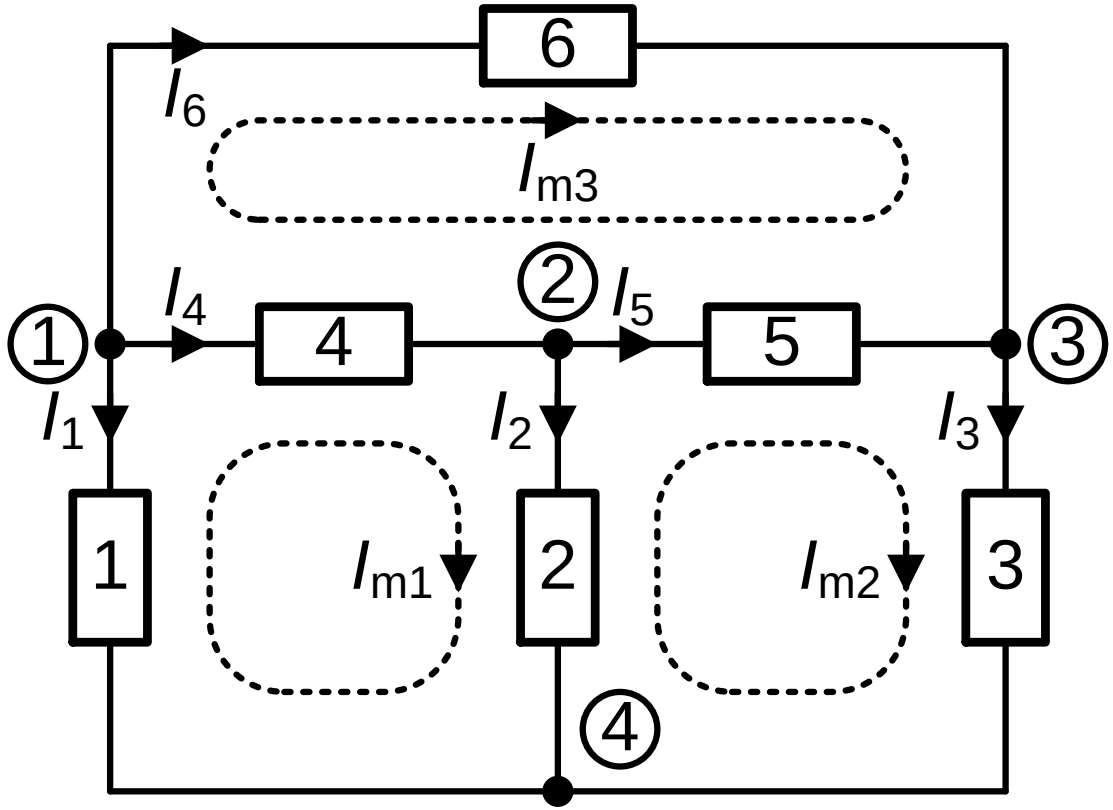
# KCL方程与回路电流

当用回路电流表示支路电流时，相当于等价地列出了KCL方程。

节点2的KCL方程：

$$I_2 - I_4 + I_5 = 0$$

$$(I_{m1} - I_{m2}) - (I_{m1} - I_{m3}) + (I_{m2} - I_{m3}) = 0$$



版权©2019，版权保留，侵犯必究

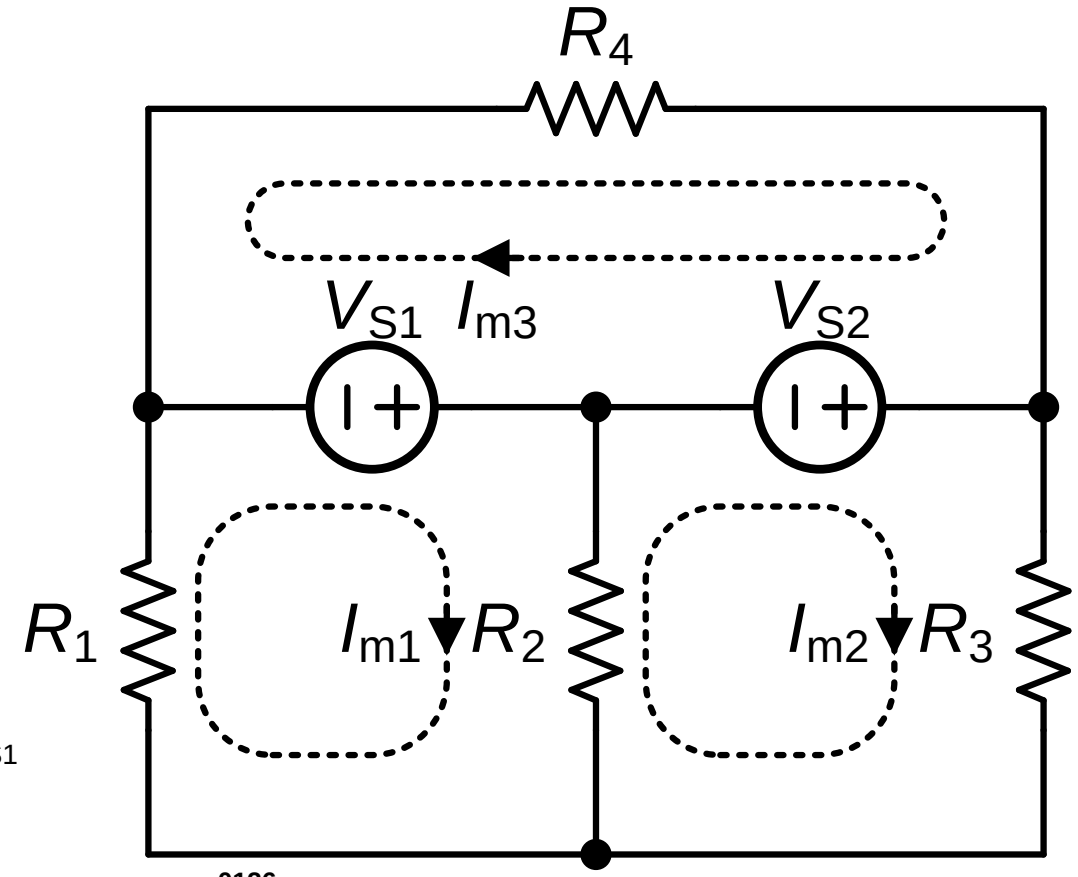
# 回路电流方程的列写

选择($b - n + 1$)个独立回路，以各回路电流为待求量列写KVL方程，这种方法称为回路电流法。

KVL方程：

$$\begin{cases} -V_{S1} + R_2(I_{m1} - I_{m2}) + R_1 I_{m1} = 0 \\ -V_{S2} + R_3 I_{m2} - R_2(I_{m1} - I_{m2}) = 0 \\ R_4 I_{m3} + V_{S2} + V_{S1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) I_{m1} - R_2 I_{m2} = V_{S1} \\ -R_2 I_{m1} + (R_2 + R_3) I_{m2} = V_{S2} \\ R_4 I_{m3} = -V_{S2} - V_{S1} \end{cases}$$



版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 回路电流方程的标准形式

$$\begin{cases} R_{11}I_{m1}+R_{12}I_{m2}+\ldots+R_{1m}I_{mm}=V_{S11} \\ R_{21}I_{m1}+R_{22}I_{m2}+\ldots+R_{2m}I_{mm}=V_{S22} \\ \cdots \\ R_{m1}I_{m1}+R_{m2}I_{m2}+\ldots+R_{mm}I_{mm}=V_{Smm} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{m1} & R_{m2} & \cdots & R_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ \cdots \\ I_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{S11} \\ V_{S22} \\ \cdots \\ V_{Smm} \end{bmatrix}$$

- $R_{jj}$是第$j$条回路上电阻之和，称为回路的自阻。
- $R_{jk}(j \neq k)$是第$j$条回路和第$k$条回路间公共支路上的电阻，称为两条回路之间的互阻。如果这两条回路电流在公共支路上的方向相同，互阻为正；否则为负。
- $V_{Sjj}$是第$j$条回路上电压源的代数和。与回路电流方向相同的电压源前面取负，否则取正。

在仅有独立电压源和电阻组成的电路中，回路电阻矩阵具有对称性，即$R_{jk}=R_{kj}$。

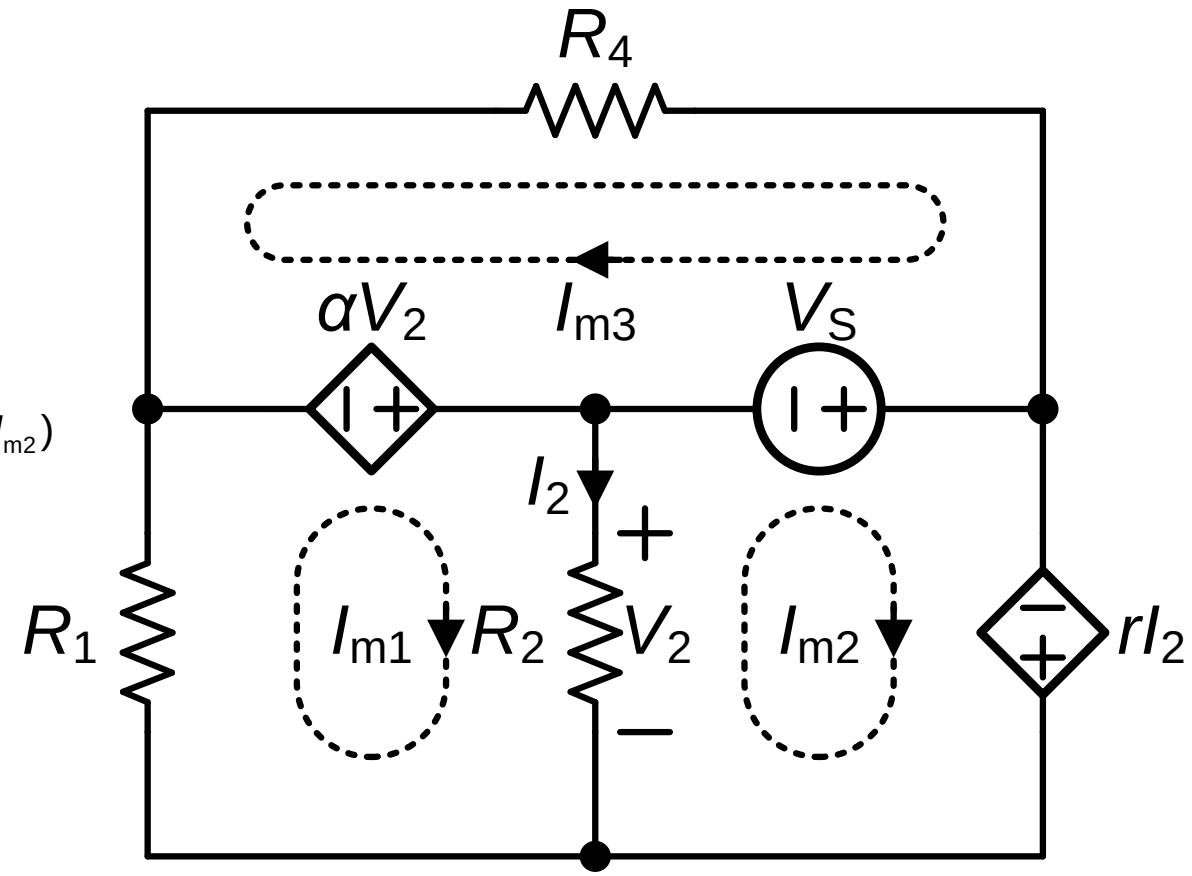
版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 例题5

列出如图所示电路的回路电流方程。

$$\begin{cases}(R_1+R_2)I_{m1}-R_2I_{m2}=\alpha R_2(I_{m1}-I_{m2})\\ -R_2I_{m1}+R_2I_{m2}=V_S+r(I_{m1}-I_{m2})\\ R_4I_{m3}=-V_S-\alpha R_2(I_{m1}-I_{m2})\end{cases}$$

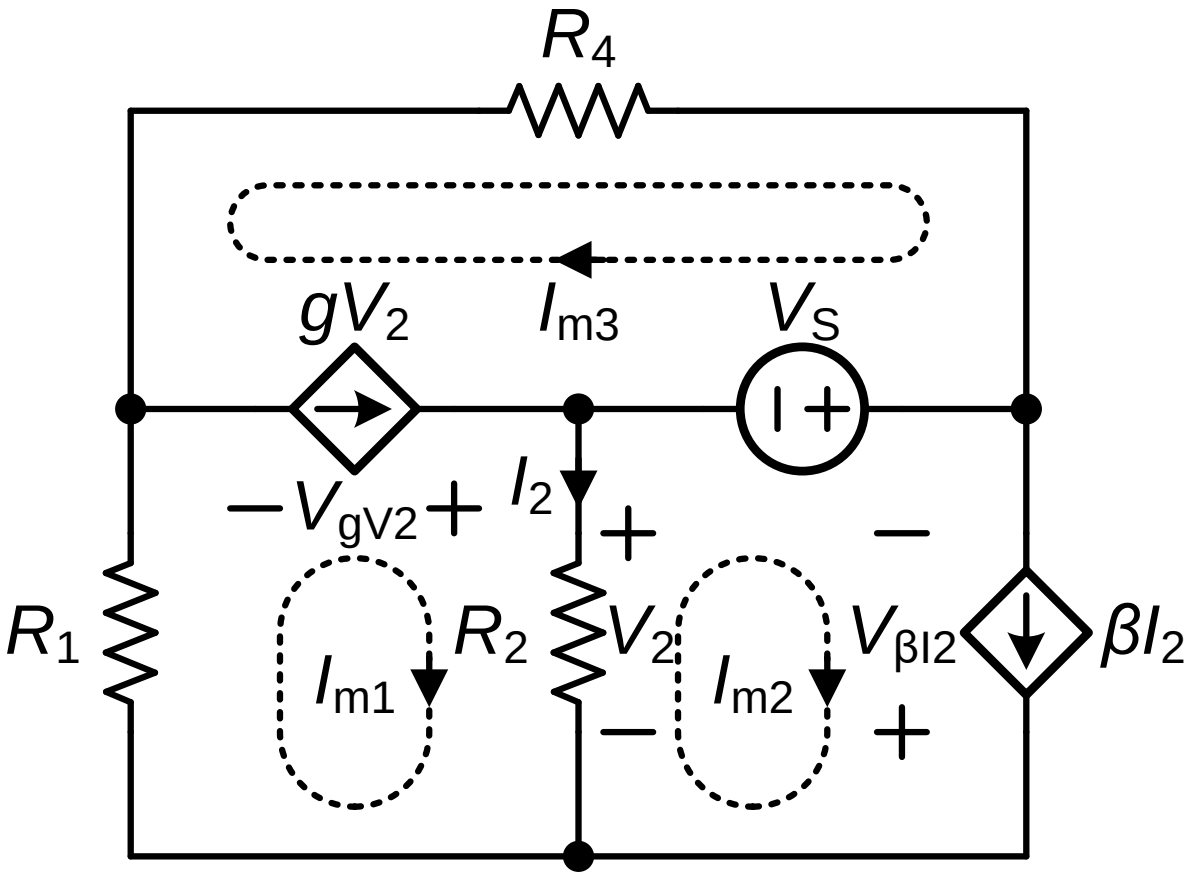
$$\begin{cases}[R_1+(1-\alpha)R_2]I_{m1}-(1-\alpha)R_2I_{m2}=0\\ -(R_2+r)I_{m1}+(R_2+r)I_{m2}=V_S\\ \alpha R_2I_{m1}-\alpha R_2I_{m2}+R_4I_{m3}=-V_S\end{cases}$$



版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 例题6

列出如图所示电路的回路电流方程。




$$\begin{cases} (R_1+R_2)I_{m1}-R_2I_{m2}=V_{gV2} \\ -R_2I_{m1}+R_2I_{m2}=V_S+V_{\beta I2} \\ R_4I_{m3}=-V_S-V_{gV2} \\ gR_2(I_{m1}-I_{m2})=I_{m1}-I_{m3} \\ \beta(I_{m1}-I_{m2})=I_{m2} \end{cases}$$

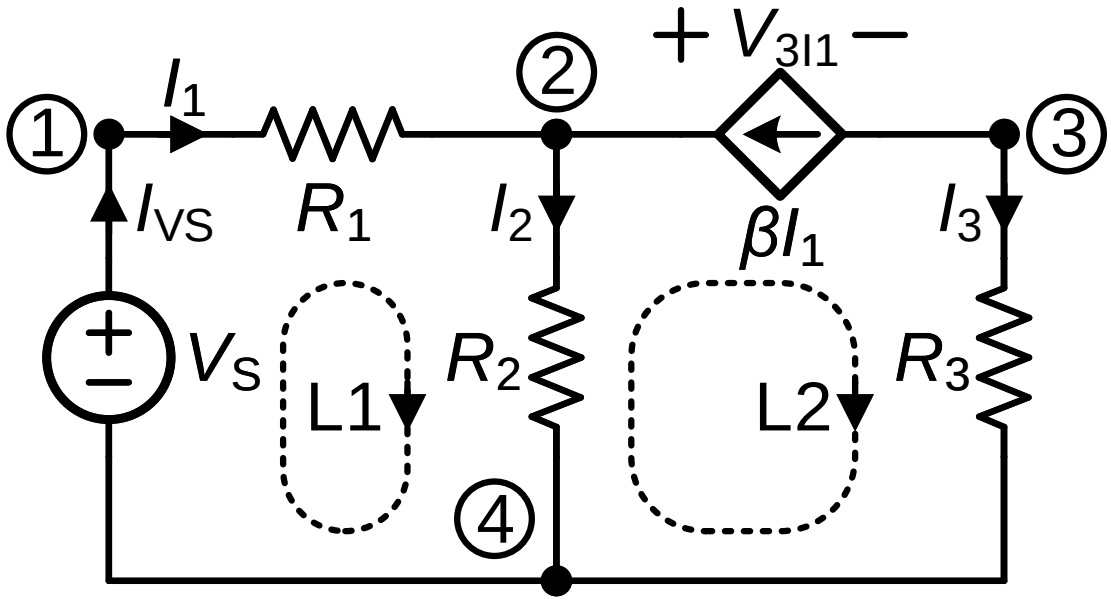
版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 例题7

如图所示，已知$R_1 = 1\ \Omega$，$R_2 = 2\ \Omega$，$R_3 = 4\ \Omega$，$\beta = 3$，$V_S = 9\ \mathrm{V}$，求电流$I_1$。

回路电流方程

$$\begin{cases} (R_1+R_2)I_{m1} - R_2 I_{m2} = V_S \\ -R_2 I_{m1} + (R_2+R_3)I_{m2} = -V_{3I1} \\ -\beta I_{m1} = I_{m2} \end{cases}$$




$I_{m1} = 1\ \mathrm{A}$, $I_{m2} = -3\ \mathrm{A}$, $V_{3I1} = 20\ \mathrm{V}$

版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 节点电压法

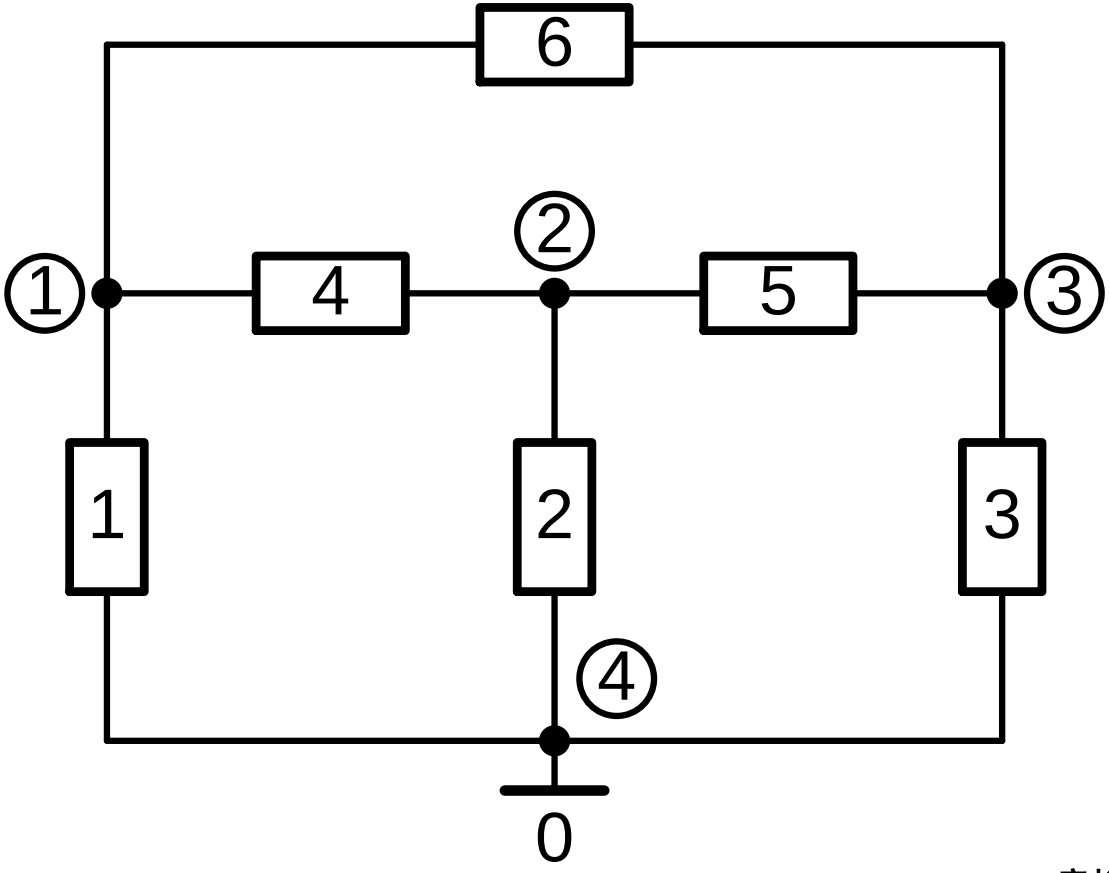
任选一节点作为参考节点，其他各节点与参考节点之间的电压称为该节点的节点电压。

参考节点电压：

$V_{n4} = 0$

节点电压：

$V_{n1}$，$V_{n2}$和$V_{n3}$



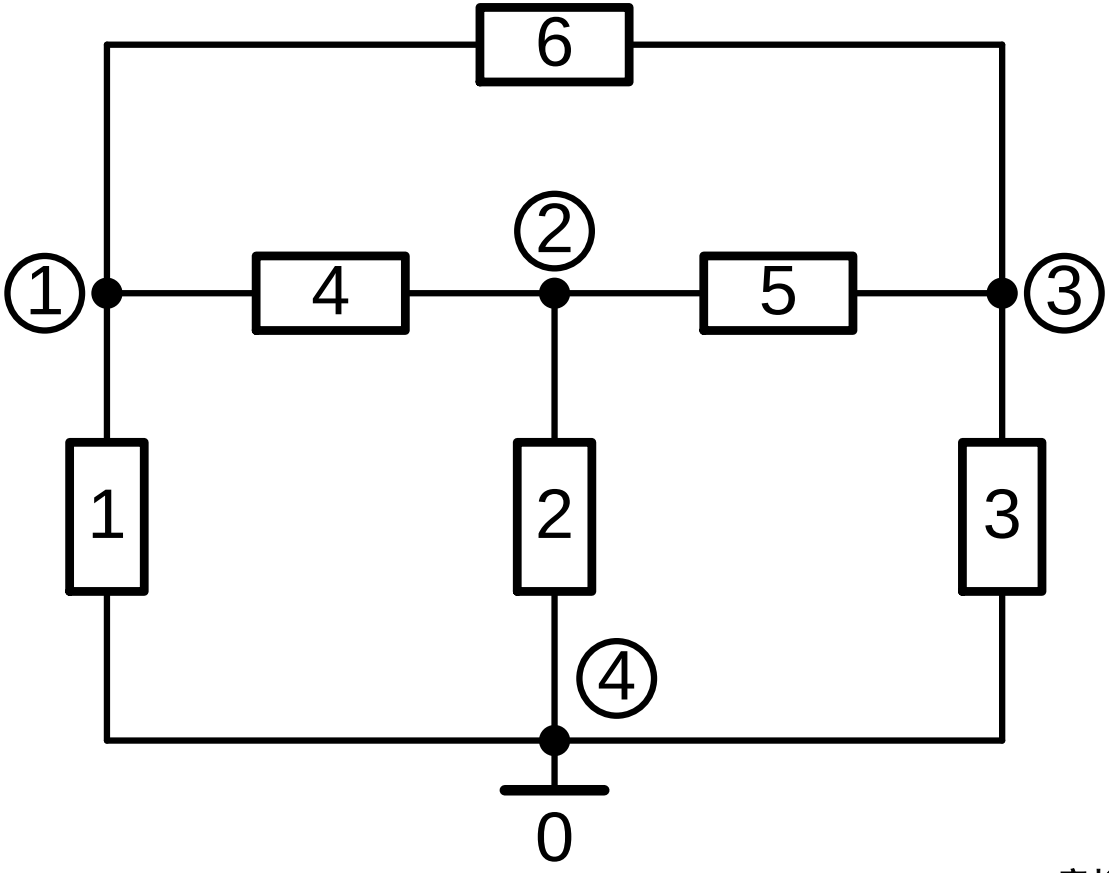
版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 支路电压与节点电压

支路电压可以通过节点电压之差来表示。

支路电压：

$$V_{14} = V_{n1} - V_{n4} = V_{n1}$$
$$V_{24} = V_{n2} - V_{n4} = V_{n2}$$
$$V_{34} = V_{n3} - V_{n4} = V_{n3}$$
$$V_{12} = V_{n1} - V_{n2}$$
$$V_{23} = V_{n2} - V_{n3}$$
$$V_{13} = V_{n1} - V_{n3}$$



版权©2019，版权保留，侵犯必究

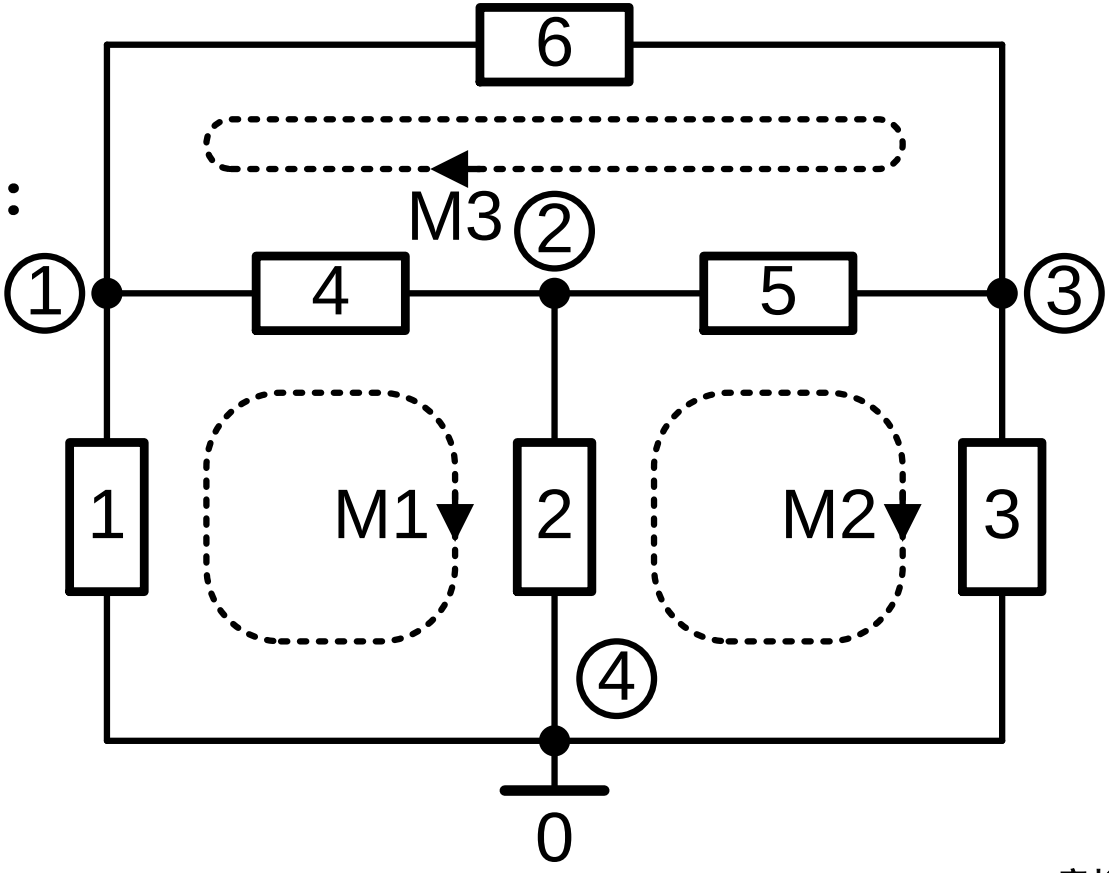
# KVL方程与节点电压

当用节点电压表示支路电压时，相当于等价地列出了KVL方程。

网孔M1的KVL方程：

$$-V_{14}+V_{12}+V_{24}=0$$

$$-(V_{n1}-V_{n4})+(V_{n1}-V_{n2})+(V_{n2}-V_{n4})=0$$



版权©2019，版权保留，侵犯必究

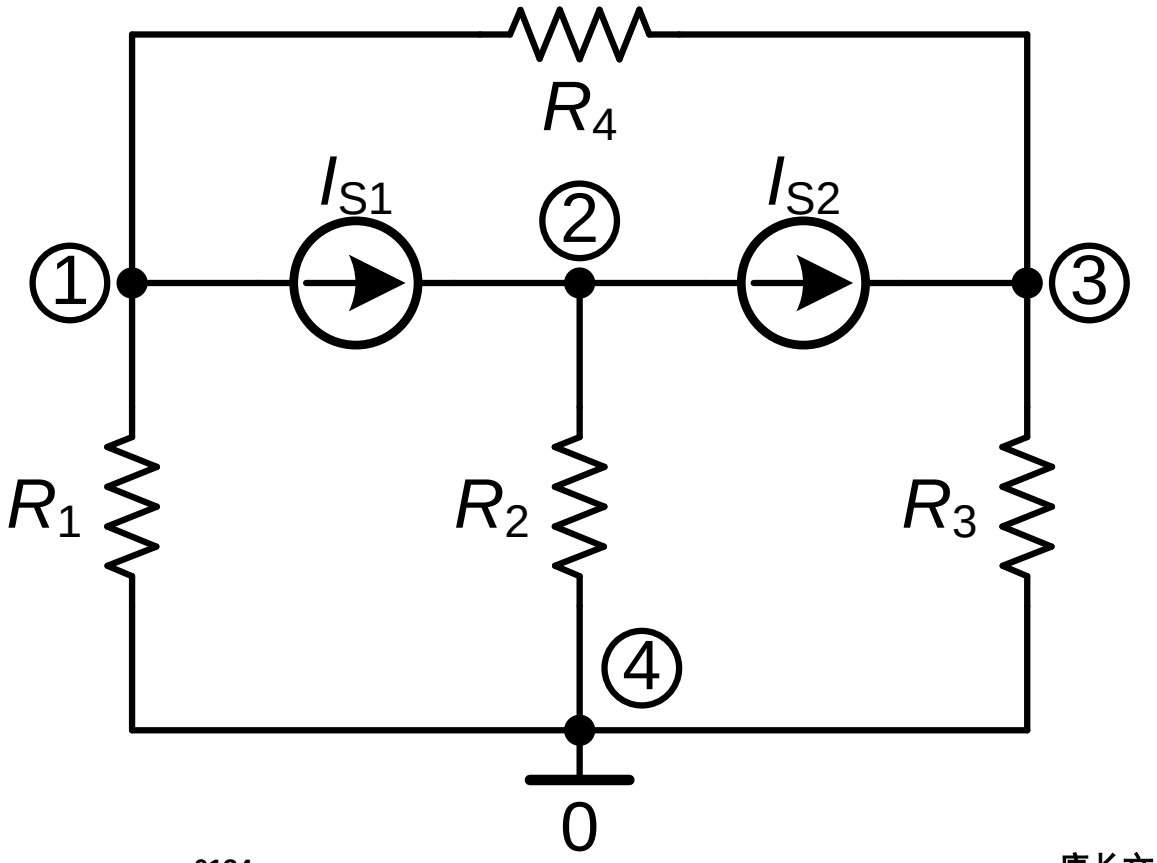
# 节点电压方程的列写

给定参考节点，以($n-1$)个独立节点电压为待求量列写KCL方程，这种方法称为节点电压法。

KCL方程：

$$\begin{cases} G_1V_{n1}+I_{S1}+G_4(V_{n1}-V_{n3})=0 \\ -I_{S1}+G_2V_{n2}+I_{S2}=0 \\ -I_{S2}+G_3V_{n3}-G_4(V_{n1}-V_{n3})=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (G_1+G_4)V_{n1}-G_4V_{n3}=-I_{S1} \\ G_2V_{n2}=I_{S1}-I_{S2} \\ -G_4V_{n1}+(G_3+G_4)V_{n3}=I_{S2} \end{cases}$$



版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 节点电压方程的标准形式

$$\begin{cases} G_{11}V_{n1}+G_{12}V_{n2}\ldots+G_{1(n-1)}V_{n(n-1)}=I_{S11} \\ G_{21}V_{n1}+G_{22}V_{n2}\ldots+G_{2(n-1)}V_{n(n-1)}=I_{S22} \\ \cdots \\ G_{(n-1)1}V_{n1}+G_{(n-1)2}V_{n2}\ldots+R_{(n-1)(n-1)}V_{n(n-1)}=I_{S(n-1)(n-1)} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1(n-1)} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{(n-1)1} & G_{(n-1)2} & \cdots & R_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \\ \cdots \\ V_{n(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{S11} \\ I_{S22} \\ \cdots \\ I_{S(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$$

- $G_{jj}$是与第$j$个节点直接相连的各支路电导之和，称为节点的自导。
- $G_{jk}(j \neq k)$是第$j$节点和第$k$节点之间的各支路电导之和并带负号，称为两个节点之间的互电导。
- $I_{Sjj}$是第$j$个节点相连的电流源的代数和。当电流流入节点时取正号；否则取负号。

在仅有独立电流源和电阻组成的电路中，回路电阻矩阵具有对称性，即$G_{jk}=G_{kj}$。

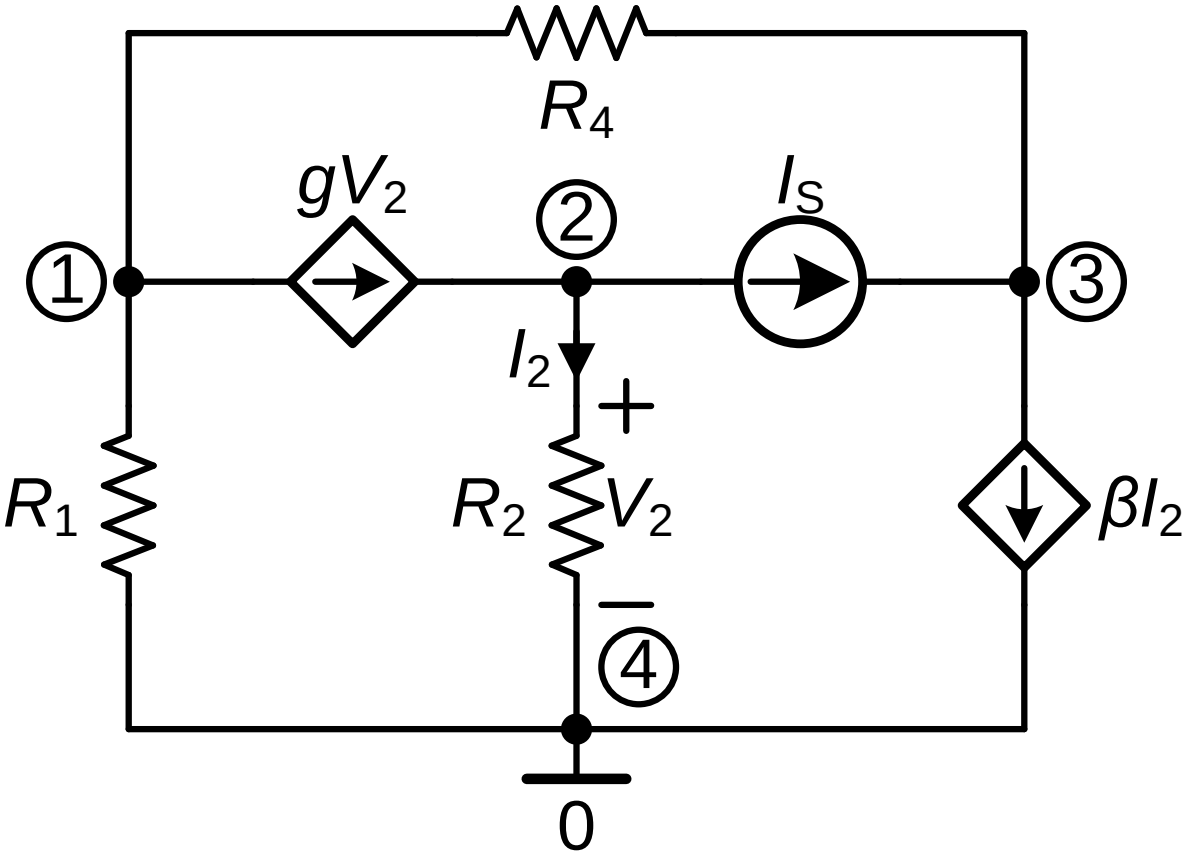
版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 例题8

列出如图所示电路的节点电压方程。

$$\begin{cases}(G_1+G_4)V_{n1}-G_4V_{n3}=-gV_{n2}\\ G_2V_{n2}=gV_{n2}-I_S\\ -G_4V_{n1}+G_4V_{n3}=I_S-\beta G_2V_{n2}\end{cases}$$

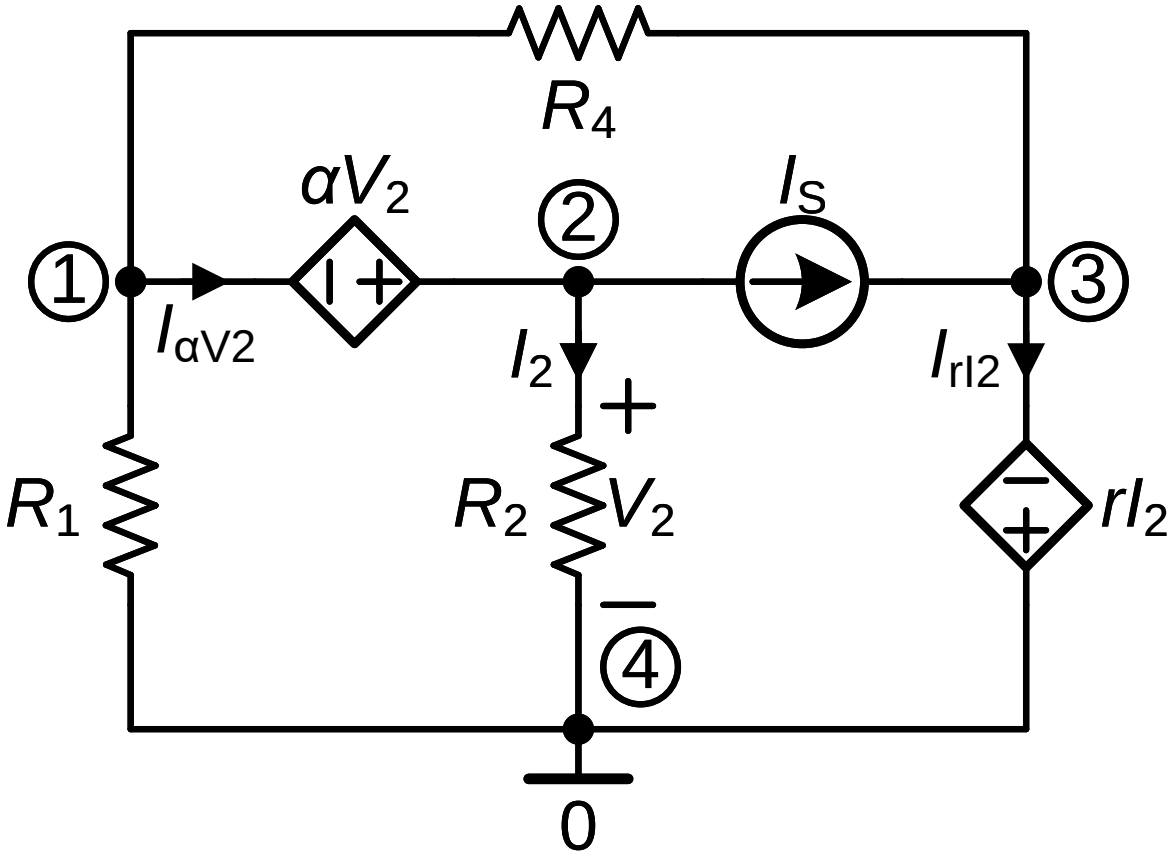
$$\begin{cases}(G_1+G_4)V_{n1}+gV_{n2}-G_4V_{n3}=0\\ (G_2-g)V_{n2}=-I_S\\ -G_4V_{n1}+\beta G_2V_{n2}+G_4V_{n3}=I_S\end{cases}$$



版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 例题9

列出如图所示电路的节点电压方程。




$$\begin{cases} (G_1+G_4)V_{n1}-G_4V_{n3}=-I_{\alpha V2} \\ G_2V_{n2}=I_{\alpha V2}-I_S \\ -G_4V_{n1}+G_4V_{n3}=I_S-I_{rI2} \\ V_{n1}-V_{n2}=-\alpha V_2 \\ V_{n3}=-rI_2 \end{cases}$$

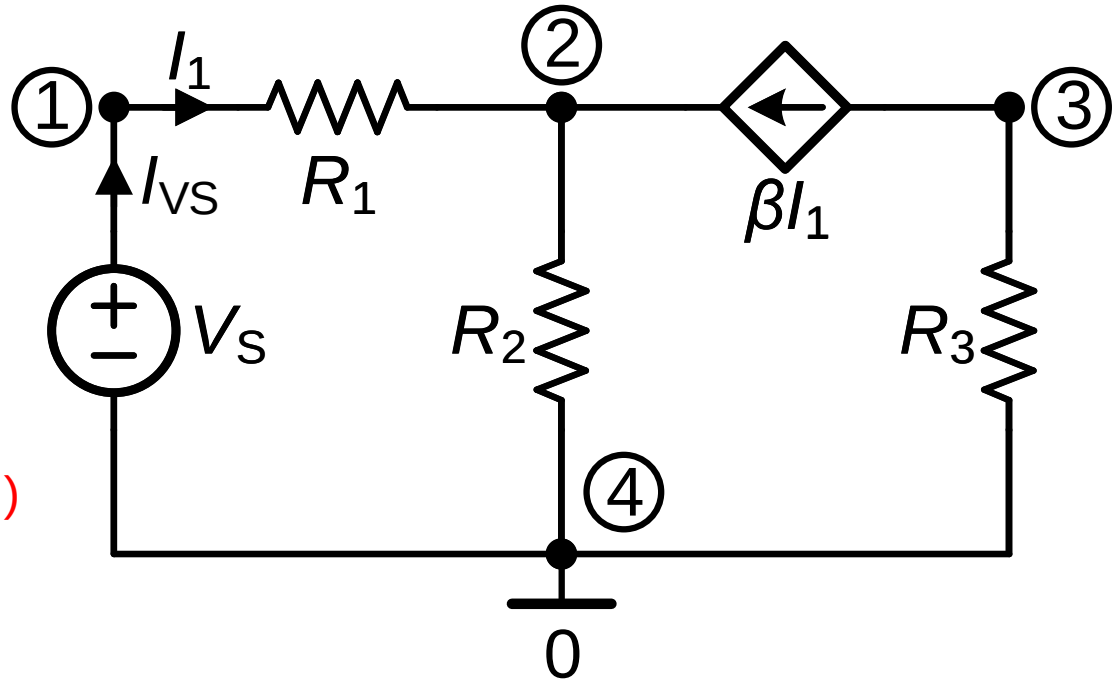
版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 例题10

如图所示，已知$R_1 = 1\ \Omega$，$R_2 = 2\ \Omega$，$R_3 = 4\ \Omega$，$\beta = 3$，$V_S = 9\ \mathrm{V}$，求电流$I_1$。

节点电压方程

$$\begin{cases} G_1 V_{n1} - G_1 V_{n2} = I_{VS} \\ -G_1 V_{n1} + (R_1 + R_2) V_{n2} = \beta I_1 \\ G_3 V_{n3} = -\beta I_1 \\ V_{n1} = V_S \\ I_1 = G_1 (V_{n1} - V_{n2}) \end{cases}$$




$V_{n2} = 8\ \mathrm{V}$, $V_{n3} = -12\ \mathrm{V}$, $I_1 = 1\ \mathrm{A}$

版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 思考

- 回路电流法中，存在有伴电压源和有伴电流源，如何处理？

  有伴电压源保持不变；有伴电流源等效为有伴电压源。

- 节点电压法中，存在有伴电压源和有伴电流源，如何处理？

  有伴电压源等效为有伴电流源，有伴电流源保持不变。

有伴电压源：电压源与电阻串联，即戴维南电路。

有伴电流源：电流源与电阻并联，即诺顿电路。

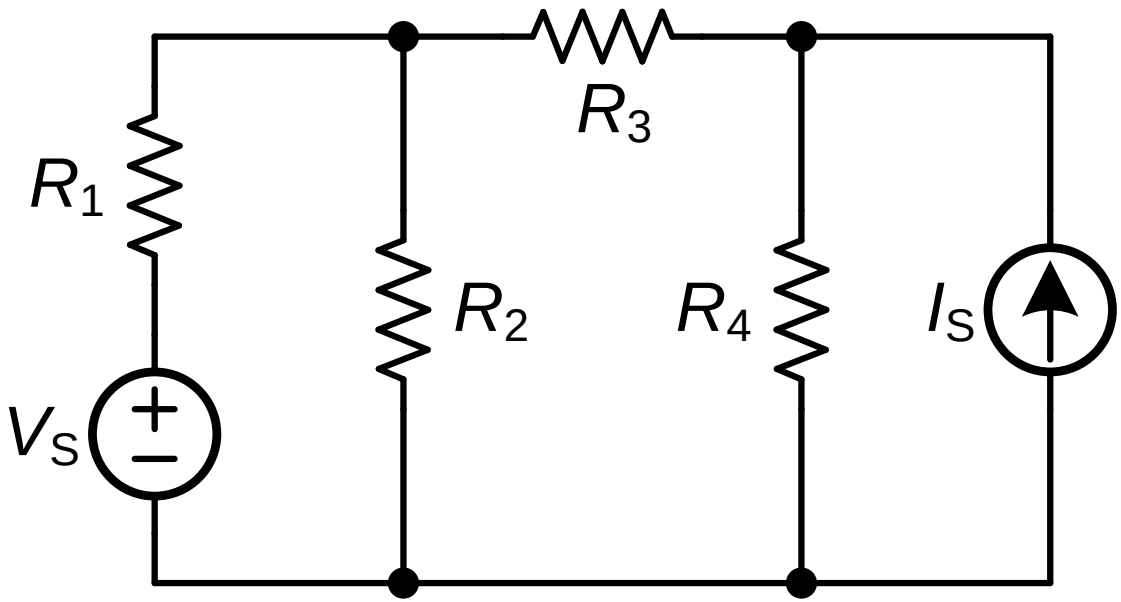
版权©2019，版权保留，侵犯必究

# 例题11

列出如图所示电路的回路电流方程和节点电压方程。

- 回路电流方程

$$\begin{cases} (R_1+R_2)I_{m1}-R_2I_{m2}=V_S \\ -R_2I_{m1}+(R_2+R_3+R_4)I_{m2}=-R_4I_S \end{cases}$$




- 节点电压方程

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)V_{n1}-\frac{1}{R_3}V_{n2}=\frac{V_S}{R_1} \\ -\frac{1}{R_3}V_{n1}+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)V_{n2}=I_S \end{cases}$$